Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 13. Mai 2016

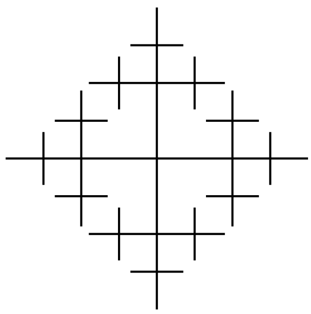
Aufgabe 1 (Taxi-Kongruenzsätze)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. In $(\mathbb{R}^2, d_1)$ gilt der Kongruenzsatz SSS: Sind $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ und $(\gamma_0', \gamma_1', \gamma_2')$ geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ und gilt
$$L(\gamma_0) = L(\gamma_0'), \quad L(\gamma_1) = L(\gamma_1'), \quad L(\gamma_2) = L(\gamma_2'),$$
so sind die die Mengen $\operatorname{im}\gamma_0 \cup \operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2$ und $\operatorname{im}\gamma_0' \cup \operatorname{im}\gamma_1' \cup \operatorname{im}\gamma_2'$ in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ kongruent.
2. In $(\mathbb{R}^2, d_1)$ sind Sphären von gleichem Radius kongruent: Ist $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sind $x, x' \in \mathbb{R}^2$, so sind die Sphären $S_x^{(\mathbb{R}^2,d_1)}(r)$ und $S_{x'}^{(\mathbb{R}^2,d_1)}(r)$ in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ kongruent.

Aufgabe 2 (goldenes Schnittchen)**.** Konstruieren Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit
$$d_2(x,y) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$
mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion.

Aufgabe 3 (Baumwachstum)**.** Wir betrachten den 4-*regulären Baum* T_4, d.h. den Graphen mit Knotenmenge $V := \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0\} \times \{0,\dots,3\} \times \{1,2,3\}^n$ und der Kantenmenge
$$E := \bigl\{\{0,(0,0)\}\bigr\} \cup \bigl\{\{v, va\} \bigm| v \in V, a \in \{1,2,3\}\bigr\}.$$
Dabei steht va für das Tupel, das man erhält, wenn man a hinten an v anhängt. Sei d die von T_4 auf V induzierte Metrik.

1. Erklären Sie, wie man das untenstehende Bild als Skizze von T_4 auffassen kann, indem Sie die Knoten geeignet beschriften.



2. Bestimmen Sie für den Knoten 0 und alle $r \in \mathbb{N}$ das „Volumen“ $\bigl|B_0^{(V,d)}(r)\bigr|$.

- *Bonusaufgabe (2 Punkte).* Zeigen Sie, dass $\operatorname{Isom}(V, d_4)$ überabzählbar ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Polyduell)**.** In der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$ treffen sich 2015 Personen zu einem Polyduell. Gemäß alter Tradition stellen sie sich so auf, dass die Abstände zwischen je zwei Personen alle verschieden sind. Pünktlich zum offiziellen Startsignal erschießt jeder denjenigen, der ihm am nächsten ist (bezüglich d_2).

1. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Teilnehmer überlebt.

   Hinweis. Extremalprinzip!

2. Zeigen Sie, dass sich die (geradlinigen!) Flugbahnen zweier Kugeln *nicht* schneiden können.

Bonusaufgabe (Origami)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach wie Konstruierbarkeit von Punkten in $\mathbb{R}^2$ via Origami definiert ist und erklären Sie die erlaubten Konstruktionsschritte sowohl mathematisch als auch origamisch.

2. Schlagen Sie in der Literatur nach wie sich Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal zu Konstruierbarkeit mit Origami verhält.

Abgabe bis zum 20. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen