Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 6 vom 20. Mai 2016

Aufgabe 1 (Orthogonalität)**.** Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp y$ und $y \perp z$, so folgt $x \perp z$.
2. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp (y + z)$, so folgt $x \perp y$ und $x \perp z$.

Aufgabe 2 (Normen ohne Skalarprodukt)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ *nicht* von einem Skalarprodukt induziert sind.

Aufgabe 3 (Isometriegruppe des Quadrats)**.** Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
Q &:= \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\} \\
Q^\square &:= \big([-1,1] \times \{-1,1\}\big) \cup \big(\{-1,1\} \times [-1,1]\big) \\
Q^\blacksquare &:= [-1,1] \times [-1,1]
\end{aligned}$$

und den Graphen

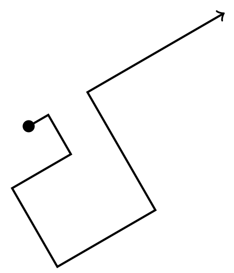
$$X^\square := (V^\square, E^\square) := \big(\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}\}\big).$$

Wir versehen Q, $Q^\square$ und $Q^\blacksquare$ jeweils mit der von der euklidischen Metrik d_2 induzierten Metrik; wir versehen $V^\square$ mit der von $X^\square$ induzierten Metrik d. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Zeigen Sie: Ist $f \in \operatorname{Isom}(Q, d_2)$, so bildet f diagonal gegenüberliegende Punkte auf diagonal gegenüberliegende Punkte ab (Extremalprinzip!). Folgern Sie, dass $\operatorname{Isom}(Q, d_2)$ zu $\operatorname{Isom}(V^\square, d)$ isomorph ist.
2. Zeigen Sie: Die Inklusion $Q \longrightarrow Q^\square$ induziert einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Isom}(Q^\square, d_2) \longrightarrow \operatorname{Isom}(Q, d_2)$.
3. Zeigen Sie: Die Inklusion $Q^\square \longrightarrow Q^\blacksquare$ induziert einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Isom}(Q^\blacksquare, d_2) \longrightarrow \operatorname{Isom}(Q^\square, d_2)$.
4. Bestimmen Sie die Isometriegruppe von $(Q^\square, d_2)$; d.h. geben Sie die Verknüpfungstabelle oder eine algebraische Beschreibung von $\operatorname{Isom}(Q^\square, d_2)$ an.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Perpendikulus)**.** Der Roboter Perpendikulus lebt in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$; aufgrund seines ausgeprägten Orthogonalitätsbewusstseins bewegt er sich auf Perpendikulus-Routen fort:



Eine *Perpendikulus-Route* aus $n \in \mathbb{N}$ Segmenten ist eine Folge $(s_1, \dots, s_n)$ von n geraden Segmenten (d.h. euklidischen Geodäten) in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $j \in \{1, \dots, n\}$, so hat s_j die Länge j, das Segment s_j endet am Anfang von s_{j+1} und s_{j+1} ist orthogonal zu s_j; dabei verstehen wir s_{n+1} als s_1. Wir nennen $n \in \mathbb{N}$ eine *Perpendikulus-Zahl*, wenn es eine Perpendikulus-Route mit n Segmenten gibt.

1. Zeigen Sie, dass 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes Vielfache von 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
3. Warum sind 7, 10 und 12 *keine* Perpendikulus-Zahlen?
4. Zeigen Sie, dass jede Perpendikulus-Zahl durch 8 teilbar ist.

Hinweis. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem. Überlegen Sie sich dann, wie Sie den Kern des Problems durch zwei Gleichungen beschreiben können.

Bonusaufgabe (Fixpunkte auf Bäumen)**.** Sei $T = (V, E)$ ein *Baum*, d.h. ein nicht-leerer zusammenhängender Graph, der keine Kreise enthält. Sei G eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe des Graphen T. Zeigen Sie: Dann gibt es

- einen Knoten $v \in V$ mit: für alle $f \in G$ ist $f(v) = v$
- oder eine Kante $\{v, w\} \in V$ mit: für alle $f \in G$ ist $\{f(v), f(w)\} = \{v, w\}$.

Hinweis. Extremalprinzip! Betrachten Sie einen Knoten v, für den die Menge $\{f(v) \mid f \in G\}$ minimalen Durchmesser besitzt ...

Abgabe bis zum 27. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen