Übungen zur Geometrie

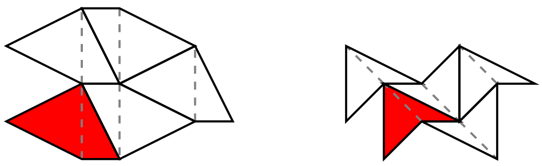
Prof. Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 10. Juni 2016

Aufgabe 1 (Pflasterungen der eukdlidischen Ebene)**.** Sei K eine endliche Menge von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist P eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protokacheln aus K, so ist P unendlich.
2. Sind P und P' Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protkacheln aus K, so gibt es eine Isometrie $g \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit
$$P' = \{g \cdot Q \mid Q \in P\}.$$

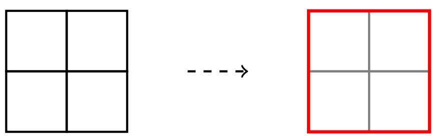
Aufgabe 2 (Vierecke)**.**

1. Geben Sie eine Definition für *Vierecke* in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
   Hinweis. Vierecke sollten Polygone sein.
2. Geben Sie eine Definition für *innere Diagonalen* von Vierecken in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
3. Was müsste man alles beweisen, wenn man aus den untenstehenden Skizzen einen vollständigen Beweis dafür formulieren wollte, dass es zu jedem Viereck V in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit der Protokachel V gibt?
   Hinweis. Es genügt, wenn Sie die einzelnen Schritte formulieren – Sie müssen den Beweis für diese Schritte *nicht* ausführen.



Aufgabe 3 (Konstruktion des regulären Fünfecks)**.** Konstruieren Sie aus der Menge $\{(0,0),(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal ein reguläres Fünfeck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Radius 1. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie die Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion.
Hinweis. Was hat Aufgabe 2 von Blatt 5 mit den Kuchenstückdreiecken eines regulären Fünfecks vom Radius 1 zu tun?

Aufgabe 4 (Inflation von Quadraten)**.** Warum kann man mit der Inflation



nicht analog zum Beweis für Penrose-Pflasterungen zeigen, dass jede Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ durch kongruente Quadrate aperiodisch ist?

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Wiederholung in Penrose-Pflasterungen)**.** Sei P eine Penrose-Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und sei $P' \subset P$ eine endliche (nicht-leere) Teilmenge. Zeigen Sie: Dann gibt es unendlich viele Isometrien $g \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit

$$\{g \cdot Q \mid Q \in P'\} \subset P.$$

In anderen Worten: Jedes endliche Stück von P wiederholt sich somit unendlich oft in P.

Hinweis. Erst Inflation, dann Deflation.