Klausur zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 27. Juli 2016

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	7	9	6	10	6	6	6	50
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (2+2+3 = 7 Punkte)**.** Die Sprache von *Schnitt-Geometrie* enthält *Geraden* und die Beziehung *„schneiden sich“* zwischen Geraden und Geraden sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Schnitt-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

S 1 Sind g und h Geraden und schneiden sich g und h, so schneiden sich auch h und g.

Ein *Modell für Schnitt-Geometrie* ist ein Paar $(G, \sqcap)$, wobei G eine Menge und „$\sqcap$“$\subset G \times G$ eine Relation auf G mit

$$\forall_{g,h \in G} \quad g \sqcap h \Longrightarrow h \sqcap g$$

ist. Wir fassen dabei die Elemente von G als Geraden auf und die Relation „$\sqcap$“ als „schneiden sich“. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Geben Sie eine vernünftige Definition für *Morphismen von Schnitt-Geometrien.*

2. Geben Sie eine vernünftige Definition für *Isomorphismen von Schnitt-Geometrien.*

3. Sind die folgenden beiden Modelle für Schnitt-Geometrie isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\big(\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,1)\}\big) \qquad \text{bzw.} \qquad \big(\{4,5,6,7\}, \{(4,5),(5,4)\}\big)$$

Lösung:

1. Seien $(G, \sqcap)$ und $(G', \sqcap')$ Modelle für Schnitt-Geometrie. Ein *Morphismus* $(G, \sqcap) \longrightarrow (G', \sqcap')$ *von Schnitt-Geometrien* ist eine Abbildung $f \colon G \longrightarrow G'$ mit
$$\forall_{g,h \in G} \quad g \sqcap h \Longrightarrow f(g) \sqcap' f(h).$$
[Alternativ kann man z.B. auch „$\Longleftrightarrow$“ statt „$\Longrightarrow$“ verwenden.]

   [*Häufige Fehler*: Manchmal wurde nicht angegeben, zwischen welchen Mengen die unterliegende Abbildung definiert ist.]

2. Ein *Isomorphismus* $(G, \sqcap) \longrightarrow (G', \sqcap')$ *von Schnitt-Geometrien* ist ein Morphismus $f\colon (G, \sqcap) \longrightarrow (G', \sqcap')$, für den es einen Morphismus $f'\colon (G', \sqcap') \longrightarrow (G, \sqcap)$ gibt mit

$$f \circ f' = \mathrm{id}_{G'} \qquad \text{und} \qquad f' \circ f = \mathrm{id}_G \,.$$

3. Nein, denn: Nach Definition sind Isomorphismen von Schnitt-Geometrien insbesondere Bijektionen zwischen den Geradenmengen. Die beiden gegebenen Schnitt-Geometrien haben jedoch Geradenmengen unterschiedlicher Kardinalität (drei bzw. vier Elemente) – zwischen diesen Geradenmengen gibt es also *keine* Bijektion und somit auch keine Isomorphismen zwischen den beiden Schnitt-Geometrien.

   [*Häufige Fehler*: Manchmal wurde nicht begründet, warum Isomorphismen nur zwischen Modellen mit Geradenmengen der gleichen Mächtigkeit existieren können.]

Aufgabe 2 ($3+3+3=9$ Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gilt für jede glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bereits
$$\forall_{t\in[0,1]} \quad \gamma(t) \perp \dot\gamma(t)$$
bezüglich des Standardskalarprodukts?

2. Gibt es eine Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$ mit
$$\forall_{z\in H} \quad \operatorname{Im} f(z) < \operatorname{Im} z\ ?$$

3. Gilt für jede glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow H$ und jede Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$ bereits $L_{\mathbb{H}^2}(f\circ\gamma) = L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$?

Lösung:

1. Nein, denn: Wir betrachten zum Beispiel die glatte Kurve
$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto (t,0).\end{aligned}$$
Dann gilt
$$\bigl\langle \gamma(1), \dot\gamma(1)\bigr\rangle = \bigl\langle (1,0),(1,0)\bigr\rangle = 1 \neq 0,$$
und damit ist $\gamma(1)$ *nicht* orthogonal zu $\dot\gamma(1)$.

   [*Häufige Fehler*: Manchmal wurden Abbildungen angegeben, deren Wertebereich gar nicht in $\mathbb{R}^2$, sondern in $\mathbb{R}$ liegt.]

2. Ja, denn: Wir betrachten die Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$ zu
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),$$
d.h.
$$\forall_{z\in H} \quad f(z) = \frac{\frac12\cdot z}{2} = \frac14\cdot z.$$
Insbesondere gilt
$$\forall_{z\in H} \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac14\cdot \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z,$$
da alle Elemente von H positiven Imaginärteil haben.

3. Ja, denn: Möbiustransformationen sind riemannsche Isometrien (bezüglich der riemannschen Metrik g_H von $\mathbb{H}^2$) und daher insbesondere längenerhaltend.

Aufgabe 3 (3 + 3 = 6 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist die Abbildung
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto n^2 \end{aligned}$$
eine quasi-isometrische Einbettung (bzgl. der Standardmetrik auf $\mathbb{Z}$)?

2. Seien (X, d), (X', d'), (X'', d'') metrische Räume, seien $f_1, f_2 \colon X \longrightarrow X'$ Abbildungen, die endlichen Abstand voneinander haben, und sei außerdem $g \colon (X', d') \longrightarrow (X'', d'')$ eine quasi-isometrische Einbettung. Haben dann auch $g \circ f_1$ und $g \circ f_2$ notwendigerweise endlichen Abstand voneinander?

Lösung:

1. Nein, denn: Ist $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so gilt für $x_1 := 0$ und $x_2 := C + 1$:
$$\begin{aligned} d(x_1^2, x_2^2) &= d\bigl(0, (C+1)^2\bigr) = (C+1)^2 = C^2 + 2 \cdot C + 1 \\ &> C \cdot (C+1) + C = C \cdot d(x_1, x_2) + C \end{aligned}$$
(wobei wir die Standardmetrik auf $\mathbb{Z}$ mit d bezeichnen). Also ist die obige Abbildung *keine* quasi-isometrische Einbettung.

   [*Häufige Fehler*: Oft wurde versucht, über Enden zu argumentieren; mal abgesehen davon, dass wir das nicht im Detail behandelt haben, funktioniert dieses Argument auch prinzipiell nicht.

   Außerdem wurde oft unsauber über die Variablen quantifiziert.]

2. Ja, denn: Sei $C \in \mathbb{R}_{>0}$ so groß gewählt, dass
$$\begin{aligned} &\forall_{x \in X} \quad d'\bigl(f_1(x), f_2(x)\bigr) \leq C \\ &\forall_{x'_1, x'_2 \in X'} \quad d''\bigl(g(x'_1), g(x'_2)\bigr) \leq C \cdot d'(x'_1, x'_2) + C. \end{aligned}$$
Also gilt für alle $x \in X$, dass
$$\begin{aligned} d''\bigl(g \circ f_1(x), g \circ f_2(x)\bigr) &\leq C \cdot d'\bigl(f_1(x), f_2(x)\bigr) + C \\ &\leq C \cdot C + C, \end{aligned}$$
d.h. $g \circ f_1$ und $g \circ f_2$ haben endlichen Abstand voneinander.

   [*Häufige Fehler*: Oft wurde unsauber über die Variablen quantifiziert.]

Aufgabe 4 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

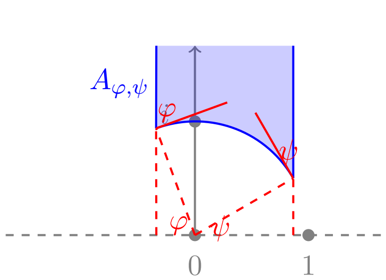
1. Formulieren Sie den Satz von Gauß-Bonnet für die hyperbolische Ebene.
2. Wie/unter welchen Voraussetzungen ist der hyperbolische Winkel zwischen glatten Kurven in der hyperbolischen Ebene definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung/Folgerung des Satzes von Gauß-Bonnet.

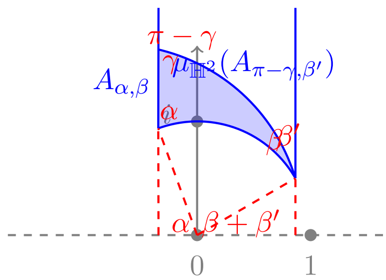
Lösung:

1. Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) mit Winkeln α, β, γ und das Bild von Δ sei nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten. Dann gilt
$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$
[*Häufige Fehler*: Oft wurde die Nicht-Entartungsbedingung vergessen.]

2. Seien $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow H$ und $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow H$ glatte Kurven in $\mathbb{H}^2$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0 \neq \dot\gamma_2(0)$. Dann definieren wir den *hyperbolischen Winkel zwischen γ_1 und γ_2* durch
$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) := \arccos \frac{\langle \dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\rangle_{H,\gamma_1(0)}}{\|\dot\gamma_1(0)\|_{H,\gamma_1(0)} \cdot \|\dot\gamma_2(0)\|_{H,\gamma_2(0)}} \in [0, \pi].$$
[*Häufige Fehler*: Oft wurden Voraussetzungen an die Kurven vergessen und beim Skalarprodukt bzw. bei den Normen der Basispunkt nicht genau spezifiziert.]

3. Wir bestimmen zunächst den Flächeninhalt gewisser verallgemeinerter Dreiecke, die einen „Eckpunkt auf dem Rand der hyperbolischen Ebene“ haben (s. linke Abbildung), und leiten dann daraus mit einem Zerlegungsargument den Fall geodätischer Dreiecke ab (s. rechte Abbildung).





Im linken Fall wird dabei der Flächeninhalt durch ein explizites Integral als $\pi - (\varphi + \psi)$ ausgerechnet; das Zerlegungsargument und die Bestimmung der Beziehungen zwischen den auftretenden Winkeln beruht auf elementargeometrischen Überlegungen in $\mathbb{H}^2$ bzw. $(\mathbb{R}^2, d_2)$ (da das Halbebenenmodell winkeltreu ist).

Dass wir geodätische Dreiecke immer als in der skizzierten Lage voraussetzen können, liegt an den Transitivitätseigenschaften der Möbiustransformationen.

4. Zum Beispiel folgt aus dem Satz von Gauß-Bonnet, dass die Winkelsumme von geodätischen Dreiecken in (H, d_H) kleiner als π ist.

   Weitere Möglichkeiten: Der Flächeninhalt von geodätischen Dreiecken in der hyperbolischen Ebene (H, d_H) ist kleiner als π, die euklidische Ebene und die hyperbolische Ebene sind *nicht* lokal isometrisch, ...

Aufgabe 5 ($4 + 2 = 6$ Punkte)**.**

1. Sei (V, E) ein endlicher zusammenhängender planarer Graph und es gelte $|V| \geq 3$. Zeigen Sie, dass

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$

2. Zeigen Sie, dass der Graph K_5 *nicht* planar ist.

Lösung:

1. Sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung von X und sei ohne Einschränkung $|V| \geq 4$. Nach dem eulerschen Polyedersatz erfüllt dann die Anzahl F der Facetten von f die Gleichung

$$F = 2 - |V| + |E|.$$

   Da im Fall $|V| \geq 4$ jede Facette von mindestens drei Kanten begrenzt wird und jede Kante im Rand von höchstens zwei Facetten liegt, folgt

$$\frac{2 \cdot |E|}{3} \geq F = 2 - |V| + |E|.$$

   Somit erhalten wir $|E| \leq 3 \cdot |V| - 3 \cdot 2$, wie behauptet.

   [*Häufige Fehler*: Manchmal wurde nur über Facetten (ohne unterliegende planare Einbettung) gesprochen. Ein paar haben einen Induktionsbeweis versucht – das ist jedoch sehr anspruchsvoll und erfordert viele Detailüberlegungen.]

2. *Angenommen*, K_5 ist planar. Nach dem ersten Aufgabenteil gilt dann

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9,$$

   was nicht sein kann. Also ist K_5 *nicht* planar.

   [*Häufige Fehler*: Manchmal wurde versucht, Facetten von etwas zu zählen, was keine planare Einbettung ist.]

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf einem Oktaeder:

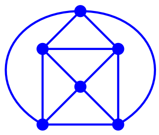
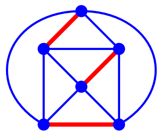
- Spieler A beginnt und setzt eine Spielfigur auf eine Ecke seiner Wahl des Oktaeders. Danach macht Spieler B den ersten normalen Zug.
- Ein Zug besteht darin, diese Figur auf eine Ecke zu setzen, die auf derselben Seitenfläche wie die aktuell besetzte Ecke liegt, und die in den vorigen Zügen noch *nicht* besucht wurde.
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Der Spieler, der den letzten Zug machen kann, gewinnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt.

Lösung: Wir modellieren das Spielfeld durch einen Graphen X:

- Die Knoten von X sind die Ecken des Oktaeders
- und zwei Knoten von X sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Ecken des Oktaeders auf derselben Seitenfläche des Oktaeders liegen.

Wir können X somit wie in der linken Abbildung illustrieren:

Man stellt ohne Schwierigkeiten fest, dass X ein perfektes Matching besitzt, z.B. wie in der rechten Abbildung.

Spieler B spielt nun nach folgender Strategie: Nach jedem Zug von Spieler A setzt Spieler B auf den durch das Matching damit verbundenen Knoten im obigen Graphen. Induktiv folgt dann: Spieler B kann auf jeden Zug von Spieler A mit einem gültigen Zug antworten.

Da das Spiel nach endlich vielen Zügen endet, folgt somit, dass Spieler B das Spiel gewinnt.

[*Häufige Fehler*: Ein Oktaeder ist *kein* reguläres Achteck und auch *kein* Polyeder mit achteckigen Seitenflächen!]

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ und es gebe $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f^n(x) = x.$$

Zeigen Sie, dass die Punkte $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ auf einem gemeinsamen Kreis in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ liegen.
Hinweis. Was hat der Punkt $x_0 := \sum_{k=0}^{n-1} 1/n \cdot f^k(x)$ damit zu tun?

Lösung: Da f eine euklidische Isometrie von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist, ist f affin linear (d.h. $f - f(0)$ ist linear). Sei

$$x_0 := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f^k(x).$$

Da es sich dabei um eine Konvexkombination handelt und f affin linear ist, folgt

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\big(f^k(x)\big) = \frac{1}{n} \cdot f^n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f^k(x).$$

Wegen $f^n(x) = x = f^0(x)$ folgt also $f(x_0) = x_0$.

Da f eine Isometrie ist, erhalten wir mit $f(x_0) = x_0$

$$\begin{aligned} d_2\big(x, x_0\big) &= d_2\big(f(x), f(x_0)\big) = d_2\big(f(x), x_0\big) \\ &= d_2\big(f^2(x), x_0\big) \\ &= \cdots \\ &= d_2\big(f^{n-1}(x), x_0\big). \end{aligned}$$

Also liegen die Punkte $x, f(x), \dots, f^{n-1}$ auf einem gemeinsamen Kreis in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Mittelpunkt x_0 (und Radius $d_2(x, x_0)$).