Wiederholungsklausur zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 12. Oktober 2016

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	7	9	6	10	6	6	6	50
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($2 + 2 + 3 = 7$ Punkte)**.** Die Sprache von *Ordnungs-Geometrie* enthält *Punkte* und die Beziehung *„liegt unterhalb von“* zwischen Punkten und Punkten sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Ordnungs-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

O 1 Sind x, y, z Punkte und liegt x unterhalb von y und liegt y unterhalb von z, so liegt auch x unterhalb von z.

O 2 Sind x und y Punkte und liegt x unterhalb von y, so liegt y nicht unterhalb von x.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Ordnungsgeometrie: Kein Punkt liegt unterhalb von sich selbst.
2. Geben Sie eine vernünftige Definition dafür, was ein *Modell* für Ordnungs-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Ordnungs-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Sind x und y verschiedene Punkte, so liegt x unterhalb von y oder y liegt unterhalb von x.

Aufgabe 2 $(3+3+3=9$ Punkte$)$**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien $\gamma, \eta \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Geodäten in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit
$$\gamma(0) = \eta(0) \quad \text{und} \quad \sphericalangle(\gamma, \eta) = 0.$$
Folgt dann bereits $\gamma(1) = \eta(1)$?

2. Gibt es eine Möbiustransformation $f \colon H \longrightarrow H$ mit
$$\forall_{z \in H} \quad f(z) \neq i\ ?$$

3. Gilt für jede glatte Kurve $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow H$, dass $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma)$?

Aufgabe 3 ($3 + 3 = 6$ Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien (X, d), (X', d') metrische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow X'$ eine Abbildung mit folgender Eigenschaft:
$$\forall_{x_1,x_2 \in X} \quad \exists_{C \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \frac{1}{C} \cdot d(x_1, x_2) - C \leq d'\bigl(f(x_1), f(x_2)\bigr) \leq C \cdot d(x_1, x_2) + C.$$
Ist dann f bereits eine quasi-isometrische Einbettung $(X, d) \longrightarrow (X', d')$?
2. Ist die Komposition zweier (komponierbarer) quasi-isometrischer Einbettungen notwendigerweise eine quasi-isometrische Einbettung?

Aufgabe 4 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind planare Einbettungen von endlichen Graphen definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des eulerschen Polyedersatzes (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung/Folgerung des eulerschen Polyedersatzes.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset H$ offene nicht-leere Teilmengen. Beweisen Sie, dass es *keine* Isometrie $(U, d_2) \longrightarrow (V, d_H)$ gibt.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf dem Graphen K_8.

- Zu Beginn sind alle Kanten ungefärbt.
- Ein Zug besteht darin, eine ungefärbte Kante zu färben. Spieler A verwendet Blau und Spieler B verwendet Rot.
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der es als erstes schafft, einen zu K_3 isomorphen Untergraphen von K_8 zu produzieren, dessen Kanten alle die eigene Farbe haben, gewinnt.
- Spieler A beginnt.

Zeigen Sie, dass das Spiel *nie* unentschieden ausgeht.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine isometrische Einbettung (bezüglich der euklidischen Metrik), so ist f bereits surjektiv.
Hinweis. Was passiert mit zwei geodätischen Geraden, die sich in einem Punkt schneiden?