

# Wiederholungsklausur zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

12. Oktober 2016

---

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsleiter:

---

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

*Viel Erfolg!*

---

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	7	9	6	10	6	6	6	50
erreichte Punkte								

Note:

Unterschrift:

**Aufgabe 1** ( $2 + 2 + 3 = 7$  Punkte). Die Sprache von *Ordnungs-Geometrie* enthält *Punkte* und die Beziehung „*liegt unterhalb von*“ zwischen Punkten und Punkten sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Ordnungs-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

- O 1 Sind  $x, y, z$  Punkte und liegt  $x$  unterhalb von  $y$  und liegt  $y$  unterhalb von  $z$ , so liegt auch  $x$  unterhalb von  $z$ .
- O 2 Sind  $x$  und  $y$  Punkte und liegt  $x$  unterhalb von  $y$ , so liegt  $y$  nicht unterhalb von  $x$ .

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Ordnungsgeometrie: Kein Punkt liegt unterhalb von sich selbst.
2. Geben Sie eine vernünftige Definition dafür, was ein *Modell* für Ordnungs-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Ordnungs-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Sind  $x$  und  $y$  verschiedene Punkte, so liegt  $x$  unterhalb von  $y$  oder  $y$  liegt unterhalb von  $x$ .

*Lösung:*

1. Sei  $x$  ein Punkt. *Angenommen*, es liegt  $x$  unterhalb von  $x$ . Mit Axiom O 2 folgt dann aber, dass  $x$  nicht unterhalb von  $x$  liegt, im Widerspruch zur Annahme. Also liegt  $x$  nicht unterhalb von  $x$ .
2. Ein *Modell für Ordnungsgeometrie* ist ein Paar  $(P, <)$ , wobei  $P$  eine Menge und „ $<$ “ eine Relation auf  $P \times P$  ist, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
  - Für alle  $x, y, z \in P$  gilt: Ist  $x < y$  und  $y < z$ , so folgt  $x < z$ . (D.h. die Relation „ $<$ “ ist transitiv).
  - Für alle  $x, y \in P$  gilt: Ist  $x < y$ , so gilt nicht  $y < x$ . (D.h. die Relation „ $<$ “ ist antisymmetrisch).
3. Ja, dieser Satz ist unabhängig von den Ordnungs-Geometrie-Axiomen, denn:

Name:

Matrikelnr.:

Seite 2/8

---

- In dem Modell  $(\emptyset, \emptyset)$  für Ordnungs-Geometrie ist der obige Satz erfüllt.
- In dem Modell  $(\{0, 1\}, \emptyset)$  für Ordnungs-Geometrie ist der obige Satz *nicht* erfüllt.

[Es gibt natürlich noch viele weitere Modelle, über die man argumentieren kann.]

[*Häufige Fehler:* Oft wurden die Modelle nicht genau spezifiziert oder nur durch Skizzen vage angedeutet.]

**Aufgabe 2** ( $3 + 3 + 3 = 9$  Punkte). Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien  $\gamma, \eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  Geodäten in  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  mit

$$\gamma(0) = \eta(0) \quad \text{und} \quad \angle(\gamma, \eta) = 0.$$

Folgt dann bereits  $\gamma(1) = \eta(1)$  ?

2. Gibt es eine Möbiustransformation  $f: H \rightarrow H$  mit

$$\forall_{z \in H} \quad f(z) \neq i ?$$

3. Gilt für jede glatte Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow H$ , dass  $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma)$  ?

*Lösung:*

1. Ja, denn: Mit der Klassifikation euklidischer Geodäten folgt, dass

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t \cdot (\gamma(1) - \gamma(0)) \quad \text{und} \quad \eta(t) = \eta(0) + t \cdot (\eta(1) - \eta(0))$$

für alle  $t \in [0, 1]$  gilt und dass  $\gamma(1) \neq \gamma(0)$  und  $\eta(1) \neq \eta(0)$ . Also ist

$$0 = \angle(\gamma, \eta) = \angle(\gamma(1) - \gamma(0), \eta(1) - \eta(0)),$$

und damit  $\gamma(1) - \gamma(0) = \eta(1) - \eta(0)$ . Wegen  $\gamma(0) = \eta(0)$  folgt daraus

$$\gamma(1) = \eta(1).$$

2. Nein, denn: Alle Möbiustransformationen sind bijektiv. Also liegt  $i \in H$  im Bild jeder Möbiustransformation.
3. Nein, denn: Wir betrachten zum Beispiel die glatte Kurve

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\rightarrow H \\ t &\mapsto i \cdot e^t \end{aligned}$$

Nach der Klassifikation hyperbolischer Geodäten ist  $\gamma$  eine Geodäte in  $(H, d_H)$ . Also ist

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = d_H(\gamma(0), \gamma(1)) = \ln e - \ln 1 = 1 < e - 1 = L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma).$$

Die letzte Gleichung folgt durch eine einfache Rechnung.

[Alternativ kann man auch die triviale Abschätzung einsetzen um geeignete Gegenbeispiele anzugeben.]

**Aufgabe 3** ( $3 + 3 = 6$  Punkte). Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  metrische Räume und sei  $f: X \rightarrow X'$  eine Abbildung mit folgender Eigenschaft:

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad \exists_{C \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \frac{1}{C} \cdot d(x_1, x_2) - C \leq d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2) + C.$$

Ist dann  $f$  bereits eine quasi-isometrische Einbettung  $(X, d) \rightarrow (X', d')$ ?

2. Ist die Komposition zweier (komponierbarer) quasi-isometrischer Einbettungen notwendigerweise eine quasi-isometrische Einbettung?

*Lösung:*

1. Nein, denn: Jede Abbildung erfüllt die angegebene Bedingung (zu  $x_1, x_2 \in X$  kann man zum Beispiel  $C = d(x_1, x_2) + d'(f(x_1), f(x_2)) + 1$  wählen). Aber es gibt Abbildungen zwischen metrischen Räumen, die *keine* quasi-isometrischen Einbettungen sind, z.B. die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

(bezüglich der Standardmetrik auf  $\mathbb{R}$ ).

[*Häufige Fehler:* Beunruhigend häufig wurde nicht erkannt, dass die Reihenfolge der Quantoren im Vergleich zur Definition von quasi-isometrischen Einbettungen verändert wurde. Dadurch ändert sich die Bedingung entscheidend!]

2. Ja, denn: Seien  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  und  $g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$  quasi-isometrische Einbettungen; seien  $C, D \in \mathbb{R}_{>0}$  passende Konstanten wie in der Definition von quasi-isometrischen Einbettungen. Dann gilt für alle  $x_1, x_2 \in X$ , dass

$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) &\leq D \cdot d_Y(f(x_1), f(x_2)) + D \\ &\leq C \cdot D \cdot d_X(x_1, x_2) + C \cdot D + D \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) &\geq \frac{1}{D} \cdot d_Y(f(x_1), f(x_2)) - D \\ &\geq \frac{1}{C \cdot D} \cdot d_X(x_1, x_2) - \frac{C}{D} - D. \end{aligned}$$

Name:

Matrikelnr.:

Seite 4/8

---

Also ist  $g \circ f: (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$  eine quasi-isometrische Einbettung, z.B. bezüglich der Konstanten

$$C \cdot D + D + \frac{C}{D} + D.$$

**Aufgabe 4** ( $3 + 2 + 4 + 1 = 10$  Punkte).

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind planare Einbettungen von endlichen Graphen definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des eulerschen Polyedersatzes (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung/Folgerung des eulerschen Polyedersatzes.

*Lösung:*

1. Sei  $X = (V, E)$  ein endlicher zusammenhängender planarer Graph mit  $V \neq \emptyset$  und sei  $f: X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine planare Einbettung mit genau  $F$  Facetten. Dann gilt

$$|V| - |E| + F = 2.$$

Insbesondere ist die Anzahl der Facetten unabhängig von der gewählten planaren Einbettung.

[*Häufige Fehler:* Oft haben Voraussetzungen gefehlt.]

2. Sei  $X$  ein endlicher Graph.
  - Ist  $Z$  ein topologischer Raum, so nennen wir eine injektive stetige Abbildung  $X_{\mathbb{R}} \rightarrow Z$  eine *Einbettung von  $X$  nach  $Z$* ; dabei ist  $X_{\mathbb{R}}$  die geometrische Realisierung von  $X$ .
  - Einbettungen von  $X$  nach  $\mathbb{R}^2$  (mit der Standardtopologie) heißen *planare Einbettungen von  $X$* .

[*Häufige Fehler:* Hier war nach einer exakten Definition, nicht nach einer vagen Umschreibung, gefragt.]

3. Wir beweisen den eulerschen Polyedersatz per Induktion über die Anzahl der Kanten des planaren Graphen.

Ein zusammenhängender nicht-leerer Graph ohne Kanten besteht nur aus einem einzigen Knoten; solche Graphen sind planar und jede planare Einbettung besitzt offenbar genau eine Facette. Somit ist der eulersche Polyedersatz in diesem Fall erfüllt.

Sei nun  $X = (V, E)$  ein zusammenhängender planarer Graph, der mindestens eine Kante enthält, und der eulersche Polyedersatz sei in allen Fällen mit kleinerer Kantenmenge bereits gezeigt. Sei  $f: X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine planare Einbettung von  $X$ . Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- ① Es gibt einen Knoten  $v \in V$  vom Grad 1. In diesem Fall bezeichnen wir die an  $v$  angrenzende Kante mit  $e$  und betrachten den Graphen

$$X' := (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\}).$$

Wenden wir den Jordanschen Kurvensatz auf die Facette von  $f$  an, in der  $f(e_{\mathbb{R}})$  enthalten ist, so folgt mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned} |V| - |E| + F &= |V \setminus \{v\}| + 1 - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\ &= |V \setminus \{v\}| - |E \setminus \{e\}| + F \\ &= 2, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

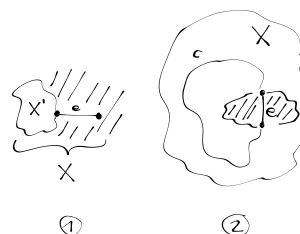
- ② Es gibt keinen Knoten in  $X$  vom Grad 1. Da  $X$  mindestens eine Kante enthält, sieht man leicht, dass  $X$  mindestens einen Kreis enthält. Sei  $e \in E$  eine Kante, die auf einem Kreis  $c$  in  $X$  liegt. Dann ist auch der Graph

$$X' := (V, E \setminus \{e\})$$

zusammenhängend und als Untergraph von  $X$  endlich und planar. Wir wenden nun den Jordanschen Kurvensatz auf die geometrische Realisierung von  $c$  an und erhalten mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} |V| - |E| + F &= |V| - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\ &= |V| - |E \setminus \{e\}| + F - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

wie behauptet.





Name:

Matrikelnr.:

Seite 5/8

---

[*Häufige Fehler:* Oft wurden die Skizzen vergessen. Außerdem haben einige versucht, Induktion über die Knoten statt über die Kanten durchzuführen. Dies führt aber im zweiten Fall zu großen Schwierigkeiten. ]

4. Zum Beispiel folgt aus dem eulerschen Polyedersatz der Sechsfarbensatz.

Alternative Möglichkeiten: Nicht-Planarität von  $K_5$  bzw.  $K_{3,3}$ , Klassifikation platonischer Körper, Satz von Pick, ...

**Aufgabe 5** (6 Punkte). Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $V \subset H$  offene nicht-leere Teilmengen. Beweisen Sie, dass es *keine* Isometrie  $(U, d_2) \rightarrow (V, d_H)$  gibt.

*Lösung: Angenommen*, es gibt eine Isometrie  $f: (U, d_2) \rightarrow (V, d_H)$ . Insbesondere bildet diese Isometrie geodätische Dreiecke auf geodätische Dreiecke ab. Mit der metrischen Beschreibung der Winkel zwischen Geodäten in der euklidischen bzw. der hyperbolischen Ebene folgt außerdem, dass  $f$  auch winkeltreu ist.

Da  $U$  nicht-leer und offen ist, enthält  $U$  ein euklidisches geodätisches Dreieck  $\Delta$ , das nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist; dieses hat die Winkelsumme  $\pi$ . Das geodätische Dreieck  $\Delta$  wird durch  $f$  auf ein geodätisches Dreieck  $\Delta'$  in  $(V, d_H)$  abgebildet (das auch nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist). Da  $f$  winkeltreu ist, hat somit auch  $\Delta'$  Winkelsumme  $\pi$ , im Widerspruch zum Satz von Gauß-Bonnet.

Also gibt es *keine* solche Isometrie.

[*Häufige Fehler*: Einige haben Argumente angegeben, die nur für spezielle Wahlen von  $U$  bzw.  $V$  funktionieren.]

**Aufgabe 6** (6 Punkte). Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf dem Graphen  $K_8$ .

- Zu Beginn sind alle Kanten ungefärbt.
- Ein Zug besteht darin, eine ungefärbte Kante zu färben. Spieler A verwendet Blau und Spieler B verwendet Rot.
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der es als erstes schafft, einen zu  $K_3$  isomorphen Untergraphen von  $K_8$  zu produzieren, dessen Kanten alle die eigene Farbe haben, gewinnt.
- Spieler A beginnt.

Zeigen Sie, dass das Spiel *nie* unentschieden ausgeht.

*Lösung:* Da  $K_8$  nur endlich viele Kanten hat, endet jede Partie nach endlich vielen Zügen.

Falls das Spiel endet, bevor alle Kanten von  $K_8$  gefärbt sind, weil einer der Spieler bereits (als erster) einen einfarbigen zu  $K_3$  isomorphen Untergraphen erreicht hat, ist nichts zu zeigen.

Wir betrachten also nun den Fall, dass das Spiel endet, weil alle Kanten von  $K_8$  gefärbt sind, und somit keine Züge mehr möglich sind. Insbesondere sind dann auch alle Kanten des Untergraphen  $K_6$  von  $K_8$  vollständig mit Blau und Rot gefärbt. Mit dem Mini-Ramsey-Satz folgt dann, dass dort bereits ein blauer oder roter zu  $K_3$  isomorpher Untergraph gefunden werden kann. Also hat auch in diesem Fall wieder einer der beiden Spieler (als erster) einen einfarbigen zu  $K_3$  isomorphen Untergraphen erreicht und somit gewonnen.

Also geht das Spiel *nie* unentschieden aus.

**Aufgabe 7** (6 Punkte). Zeigen Sie: Ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine isometrische Einbettung (bezüglich der euklidischen Metrik), so ist  $f$  bereits surjektiv.

*Hinweis.* Was passiert mit zwei geodätischen Geraden, die sich in einem Punkt schneiden?

*Lösung:* Wir betrachten das Kreuz  $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$  in  $\mathbb{R}^2$ . Dieses ist die Vereinigung des Bildes zweier euklidischer geodätischer Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden.

Da  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine isometrische Einbettung ist, ist  $f$  insbesondere injektiv und somit ist auch  $f(X)$  die Vereinigung des Bildes zweier euklidischer geodätischer Geraden  $g$  und  $h$ , die sich in genau einem Punkt schneiden. Aus der Klassifikation euklidischer geodätischer Geraden folgt, dass  $g$  und  $h$  (affine) Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sind, die sich in genau einem Punkt schneiden.

Sei nun  $x \in \mathbb{R}^2$ . Dann liegt  $x$  im Bild von  $f$ , denn: Da sich  $g$  und  $h$  in genau einem Punkt schneiden, gibt es eine (affine) Gerade  $j$  durch  $x$ , die  $g$  und  $h$  in jeweils genau einem Punkt  $y$  bzw.  $z$  schneidet. Sei  $\bar{j}$  die geodätische Gerade, die durch  $f^{-1}(y)$  und  $f^{-1}(z)$  geht. Aus der Klassifikation euklidischer geodätischer Geraden folgt

$$\text{im } j = \text{im } f \circ \bar{j}.$$

Da  $x$  auf  $j$  liegt, liegt  $x$  somit insbesondere im Bild von  $f$ .

[Es gibt viele weitere Möglichkeiten, die Surjektivität von  $f$  zu zeigen, z.B., indem das Bild  $f(X)$  anders verwendet wird oder auch Winkeltreue von  $f$  verwendet wird.]

Eine sehr effiziente Möglichkeit ist, zu beobachten, dass im Beweis der (affinen) Linearität von euklidischen Isometrien nur verwendet wurde, dass es sich um eine isometrische Einbettung bzgl. der euklidischen Metrik handelt. Also ist  $f$  eine (affin) lineare Abbildung.

Da  $f$  als isometrische Einbettung injektiv ist, ist  $f$  eine injektive (affin) lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Mit der Dimensionsformel folgt dann, dass  $f$  auch surjektiv ist.]

[*Häufige Fehler:* Erschreckenderweise wussten manche nicht, was Surjektivität ist.]