(Johannes.Prem@stud.uni-r.de)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(1) Eines der folgenden Tripel ist für alle unendlichen Mengen X und alle $x_0 \in X$ ein Modell für Mini-Geometrie:

$$\big(X, X, =\big), \quad \big(X, \mathcal{P}(X), \in\big), \quad \big(\mathcal{P}(X), \{x_0\}, \ni\big)$$

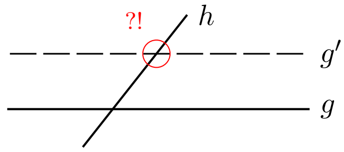
(2) Ist $(P, G, \sqsubset)$ ein Modell für Mini-Geometrie, so gilt: Ist P endlich, so ist auch G endlich.

(3) Ist $(P, G, \sqsubset)$ ein Modell für Mini-Geometrie, so gilt: Ist G endlich, so ist auch P endlich.

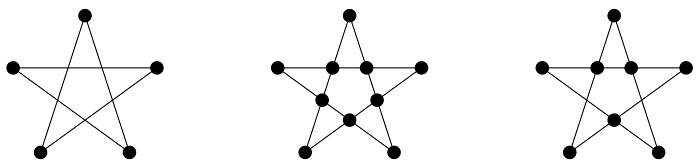
(4) Der Satz

> Sind g und h Geraden mit $g \neq h$ und ist h nicht parallel zu g, so gilt:
> Ist g' eine zu g parallele Gerade, so sind auch h und g' nicht parallel.

ist unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen.

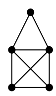


(5) Die folgenden Graphen sind planar:

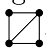


(6) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>4}$ gibt es Erzeugendensysteme S und S' von $\mathbb{Z}/n$, so dass $\operatorname{Cay}(\mathbb{Z}/n, S)$ planar und $\operatorname{Cay}(\mathbb{Z}/n, S')$ nicht planar ist.

(7) Es gibt eine Gruppe G und ein Erzeugendensystem $S \subset G$, so dass $\operatorname{Cay}(G, S)$ isomorph ist zum „Haus vom Nikolaus"-Graphen.

$\operatorname{Cay}(G, S) \overset{?!}{\cong}$ 

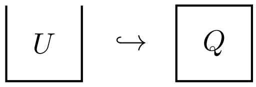
(8) Es gibt eine Isometrie $\mathbb{R}^2 \to B_0^{(\mathbb{R}^2, d_2)}(1)$ (wobei wir beide Räume mit der euklidischen Metrik ausstatten).

(9) Sei (V, d) der metrische Raum, der gegeben ist durch die Knotenmenge und die darauf induzierte Graphmetrik des Graphen . Es gibt eine isometrische Einbettung $V \to \mathbb{R}^2$ (mit der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$).

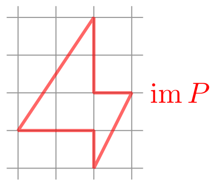
(10) Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $A \subset V$ mit $\langle A \rangle \neq V$. Dann ist das orthogonale Komplement von A nicht leer.

(11) Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$. Dann gibt es eine Spiegelung $s\colon V \to V$ mit $s(x) = y$.

(12) Sei $Q := ([-1,1]\times\{-1,1\}) \cup (\{-1,1\}\times[-1,1]) \subset \mathbb{R}^2$ (der Rand des ausgefüllten Quadrats) und sei $U := (\{-1,1\}\times[-1,1]) \cup ([-1,1]\times\{-1\}) \subset Q \subset \mathbb{R}^2$. Dann induziert die Inklusion $U \hookrightarrow Q$ einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Isom}(Q, d_2) \to \operatorname{Isom}(U, d_2)$.



(13) Sei P ein Polygon, dessen Bild in $\mathbb{R}^2$ folgende Skizze liefert (wobei das Gitter gleich $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}^2$ ist):

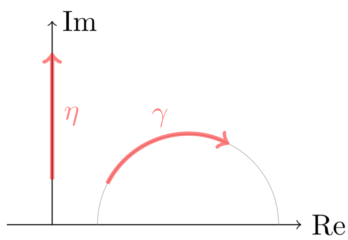


Es gilt: $\mu(P) = 4$.

(14) Eine periodische Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit genau einer Protokachel ist bereits regulär.

(15) Wir betrachten $M := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\leq 0})$ als glatte Mannigfaltigkeit (mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten glatten Struktur) zusammen mit der euklidischen riemannschen Metrik. Dann stimmt die Metrik auf M, die wir via Längen glatter Kurven erhalten, mit der d_2-Metrik auf M überein.

(16) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $f_A \circ \gamma = \eta$, wobei f_A die zu A assoziierte Möbiustransformation ist und wobei γ und η die folgenden beiden Geodäten in (H, d_H) sind:



(17) Die Spiegelung an der Achse $\{1 + i \cdot t \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\} \subset H$ ist eine Isometrie von (H, d_H).

(18) Es gibt ein (nicht-entartetes) rechtwinkliges (d. h. ein Winkel ist $\pi/2$) hyperbolisches Dreieck mit Flächeninhalt 2.

Aufgabe 2

a. Sei G die Geradenmenge der Mini-Geometrie $A(\mathbb{R}^2)$ (also $A(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2, G, \in)$). Zeigen Sie, dass auch $(G, \mathbb{R}^2, \ni)$ ein Modell für Mini-Geometrie ist.

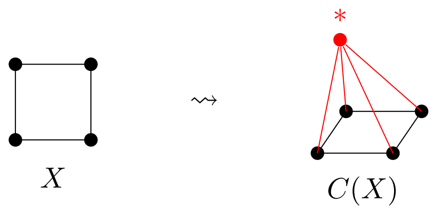
b. Ist das im Allgemeinen auch wahr? Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $(P, G, \sqsubset)$ eine Mini-Geometrie, so ist auch $(G, P, \sqsupset)$ eine Mini-Geometrie (wobei $g \sqsupset p :\Longleftrightarrow p \sqsubset g$).

Aufgabe 3

Ist $X = (V, E)$ ein Graph, so nennen wir den Graphen

$$\big(V \sqcup \{*\},\, E \cup \big\{\{v, *\} \bigm| v \in V\big\}\big)$$

den *Kegel über* X und bezeichnen diesen mit $C(X)$.



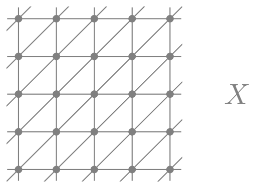
a. Wir betrachten den Graphen X, der wie folgt gegeben ist:

   – Die Knotenmenge von X ist

   $$\{1, \dots, 2016\} \times \{1, \dots, 2016\} \subset \mathbb{Z}^2$$

   – und zwei Knoten (x, y) und (x', y') bilden genau dann eine Kante, wenn

   $$\big\{|x - x'|, |y - y'|\big\} = \{0, 1\} \quad \text{oder} \quad (x - x', y - y') \in \big\{(-1, -1), (1, 1)\big\}.$$

   Zeigen Sie, dass $C(X)$ *nicht* planar ist.

b. Zeigen Sie: Ist X ein endlicher Graph mit mindestens einer Kante, so liefert die dreifach iterierte Kegelbildung $C(C(C(X)))$ stets einen *nicht* planaren Graphen.

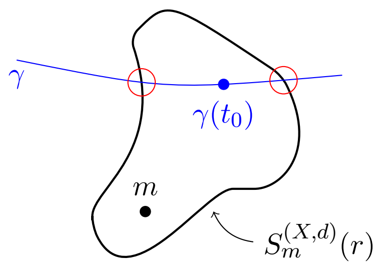
Aufgabe 4

Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $m \in X$ und sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ eine geodätische Gerade in X.

a. Zeigen Sie: Für alle $x_0 \in X$ ist die Abbildung $d(x_0, \,\cdot\,)\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig.

b. Folgern Sie: Gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $d\bigl(m, \gamma(t_0)\bigr) < r$, so gilt

$$\bigl|\operatorname{im}(\gamma) \cap S_m^{(X,d)}(r)\bigr| \geq 2.$$



c. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen *nicht* „$\ldots = 2$“ statt der letzten Ungleichung gilt.

Aufgabe 5

Wir betrachten die folgende logarithmische Spirale:

$$\gamma\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

a. Berechnen Sie für $t_0 \in [0, \pi]$ die Länge

$$\ell(t_0) := L(\gamma|_{[0,t_0]}).$$

b. Zeigen Sie, dass γ *nicht* nach Bogenlänge parametrisiert ist.

c. Zeigen Sie, dass $\ell\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ injektiv ist und bestimmen Sie für ein geeignetes $L \in \mathbb{R}$ die Umkehrabbildung $\varphi\colon [0, L] \to [0, \pi]$ zu $\ell\colon [0, \pi] \to [0, L]$.

d. Zeigen Sie, dass $\eta := \gamma \circ \varphi\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

e. Berechnen Sie die signierte Krümmung $\tilde{\kappa}_\eta(t)$ für alle $t \in (0, L)$.

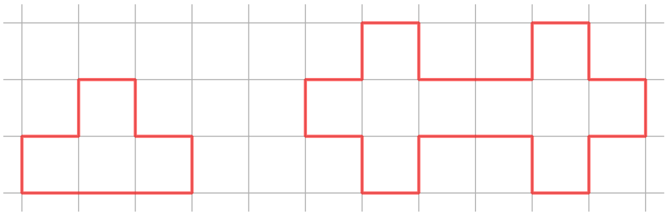
f. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ liegt $\operatorname{im}(\gamma|_{[\varepsilon, \pi-\varepsilon]})$ in der oberen Halbebene und wir können

$$\gamma_H\colon \bigl[\tfrac{1}{3}\pi, \, \tfrac{2}{3}\pi\bigr] \to H, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

betrachten. Berechnen Sie die *hyperbolische* Länge $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma_H)$.
(Hinweis: Auf $(0, \pi)$ gilt $(\ln \circ \tan \circ (x \mapsto x/2))' = 1/\sin$.)

Aufgabe 6

Wir betrachten die folgenden Protokacheln:



a. Zeigen Sie, dass es eine Pfasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protokachel P gibt.

b. Zeigen Sie, dass es *keine* Pfasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protokachel Q gibt.

c. Geben Sie eine weitere Protokachel Q' an, so dass es eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protokacheln aus $\{Q, Q'\}$ gibt. Skizzieren Sie solch eine Pflasterung.

Aufgabe 7

Wir fassen die hyperbolische Ebene als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf und bezeichnen mit d_2 die Standardmetrik auf $\mathbb{C}$.

Seien $y_0, r \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $S := S_{i \cdot y_0}^{(H,d_H)}(r)$ die hyperbolische Sphäre um $i \cdot y_0$ mit Radius r.

a. Zeigen Sie, dass es *kein* $r' \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$S = S_{i \cdot y_0}^{(\mathbb{C},d_2)}(r') \cap H.$$

b. Nehmen Sie an, dass $S = S_{i \cdot c}^{(\mathbb{C},d_2)}(r_E)$ für geeignete Parameter $c, r_E \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Bestimmen Sie c und r_E.

c. Verwenden Sie die explizite Darstellung

$$\forall\, z, z' \in H\colon \quad \cosh\big(d_H(z, z')\big) = 1 + \frac{|z - z'|^2}{2 \cdot \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z'}$$

der Metrik, um zu zeigen, dass für c und r_E wie aus dem letzten Teil tatsächlich

$$S = S_{i \cdot c}^{(\mathbb{C},d_2)}(r_E)$$

gilt.
(Hinweis: Kosinus Hyperbolicus $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und Sinus Hyperbolicus $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ erfüllen den folgenden „hyperbolischen Satz des Pythagoras“: $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.)