Probeklausur zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 15. Juli 2016

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	7	9	6	10	6	6	6	50
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($2+2+3=7$ Punkte)**.** Die Sprache von *Tri-Geometrie* enthält *Punkte*, *Dreiecke* und die Beziehung *„ist Ecke von“* zwischen Punkten und Dreiecken sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Tri-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

T 1 Zu jedem Dreieck gibt es genau drei verschiedene Punkte, die eine Ecke von diesem Dreieck sind.

T 2 Haben zwei Dreiecke dieselben drei Eckpunkte, so stimmen sie überein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Tri-Geometrie: Sind vier verschiedene Punkte gegeben, so gibt es höchstens vier verschiedene Dreiecke, deren Ecken in diesen vier Punkten liegen.

2. Geben Sie eine vernünftige Definition dafür, was ein *Modell* für Tri-Geometrie ist.

3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Tri-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Sind x, y, z drei verschiedene Punkte, so gibt es ein Dreieck Δ, so dass x, y und z Ecken von Δ sind.

Aufgabe 2 ($3+3+3=9$ Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien $\gamma, \eta \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ glatte Kurven mit $\gamma(0) = \eta(0)$ und es gelte $\widetilde{\kappa}_\gamma(t) = \widetilde{\kappa}_\eta(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Folgt dann bereits $\gamma(t) = \eta(t)$ für alle $t \in [0,1]$?

2. Gibt es eine Möbiustransformation $f \colon H \longrightarrow H$ mit
$$f(i) = i \qquad \text{und} \qquad f(2 \cdot i) = i \;?$$

3. Gilt für jede glatte Kurve $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow H \subset \mathbb{R}^2$ und jede Möbiustransformation $f \colon H \longrightarrow H$ bereits $L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(f \circ \gamma) = L_{(\mathbb{R}^2,d_2)}(\gamma)$?

Aufgabe 3 ($3 + 3 = 6$ Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Hat jede quasi-isometrische Einbettung quasi-dichtes Bild?

2. Ist jede Abbildung, die endlichen Abstand zu einer quasi-isometrischen Einbettung hat, selbst eine quasi-isometrische Einbettung?

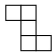
Aufgabe 4 $(3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

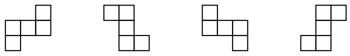
1. Formulieren Sie den Satz von Sylvester-Gallai.
2. Formulieren Sie das Extremalprinzip.
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des Satzes von Sylvester-Gallai (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung/Folgerung des Satzes von Sylvester-Gallai.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie den Kongruenzsatz SWS in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf einem 2015×2015-Schachbrett:

– Zu Beginn ist das Spielbrett leer.

– Ein Zug besteht darin, einen Stein der Form  so auf fünf Schachbrett-Felder zu setzen, dass er sich mit keinem anderen Stein überlappt; der Stein darf dabei auch gedreht/gespiegelt werden:



– Spieler A und B ziehen abwechselnd.

– Derjenige, der den letzten Stein setzen kann, gewinnt.

– Spieler A beginnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler A an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie: Es gibt *kein* reguläres geodätisches Dreieck Δ in (H, d_H) mit Flächeninhalt $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = 1/10 \cdot \pi$, für das es eine Pflasterung von (H, d_H) mit Protokachel Δ gibt.

Hinweis. Wir verwenden hier die offensichtliche hyperbolische Version der entsprechenden Begriffe für $(\mathbb{R}^2, d_2)$: Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H). Eine *Pflasterung von* (H, d_H) *mit Protokachel* Δ ist eine Menge D von geodätischen Dreiecken in (H, d_H) mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Dreieck aus D ist zu Δ kongruent (in (H, d_H)).
- Für alle $\Delta_1, \Delta_2 \in D$ mit $\Delta_1 \neq \Delta_2$ gilt
$$\Delta_1^\circ \cap \Delta_2^\circ = \emptyset$$
und $\operatorname{im} \Delta_1 \cap \operatorname{im} \Delta_2$ ist sowohl eine Seite oder eine Ecke von Δ_1 als auch eine von Δ_2.
- Es gilt
$$\bigcup_{\Delta_1 \in D} (\operatorname{im} \Delta_1 \cup \Delta_1^\circ) = H.$$