Klausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 23. Juli 2021

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3+3+4=10$ Punkte). Die Sprache von *Kreis-Geometrie* enthält *Punkte*, *Kreise* und die Beziehung *„liegt auf“* zwischen Punkten und Kreisen sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Kreis-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

K 1 Auf jedem Kreis liegen mindestens drei verschiedene Punkte.

K 2 Haben zwei Kreise drei verschiedene Punkte gemeinsam, so stimmen die Kreise überein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Kreis-Geometrie: Es gibt *keine* Kreis-Geometrie mit genau vier Punkten und genau fünf Kreisen.
2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Kreis-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Kreis-Geometrie-Axiomen?

   Je zwei verschiedene Kreise haben genau einen Punkt gemeinsam.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte). Zu $n, m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Graphen

$$K_{m,n} := \big((\{1,\dots,m\} \times \{0\}) \cup (\{1,\dots,n\} \times \{1\}),\\ \{\{(j,0),(k,1)\} \mid j \in \{1,\dots,m\}, k \in \{1,\dots,n\}\}\big).$$

1. Zeigen Sie, dass $K_{2,2020}$ planar ist, indem Sie eine entsprechende planare Einbettung skizzieren (inklusive Beschriftung der Knoten).
2. Gibt es eine planare Einbettung von $K_{2,2020}$ mit genau 2021 Facetten?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Ist $K_{3,2020}$ planar?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned} [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (3 \cdot t^2, 4 \cdot t^2) \end{aligned}$$

   und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es eine Isometrie $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_1)$ (Achtung: d_1, nicht d_2 !), die sowohl $f(0,0) = (0,0)$ als auch $f(1,0) = (1,1)$ erfüllt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\gamma\colon [0, L] \longrightarrow X$ eine Geodäte. Geben Sie einen Beweis dafür, dass γ die Länge L hat.

Aufgabe 4 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Durch welche Formel kann man die Punktspiegelung in $\mathbb{R}^2$ an x beschreiben?

2. Beweisen Sie, dass die Punktspiegelung in $\mathbb{R}^2$ an $(0, 0)$ als Komposition zweier Spiegelungen an affinen Geraden dargestellt werden kann; geben Sie dabei auch die von Ihnen verwendeten affinen Gerade an. Illustrieren Sie zusätzlich Ihre Argumente durch eine geeignete Skizze!

3. Leiten Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ aus dem Kongruenzsatz SSS und dem Sinussatz ab.

Aufgabe 5 ($1 + 4 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Wie sind geodätische Dreiecke in metrischen Räumen definiert?
2. Formulieren Sie den Satz von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke.
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung des Satzes von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke.

Aufgabe 6 ($4+2+4=10$ Punkte)**.**

1. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und ist $f_A = \mathrm{id}_H$, so folgt $A \in \{+E_2, -E_2\}$, wobei $E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Seien $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Folgern Sie, dass genau dann $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$ gilt, wenn $A \cdot B = \pm\, B \cdot A$ ist.

3. Geben Sie ein Beispiel für eine Möbiustransformation f mit $f(i) = 1+2\cdot i$.

   Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie f geometrisch!