Klausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 23. Juli 2021

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte). Die Sprache von *Kreis-Geometrie* enthält *Punkte*, *Kreise* und die Beziehung *„liegt auf“* zwischen Punkten und Kreisen sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Kreis-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

K 1 Auf jedem Kreis liegen mindestens drei verschiedene Punkte.

K 2 Haben zwei Kreise drei verschiedene Punkte gemeinsam, so stimmen die Kreise überein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Kreis-Geometrie: Es gibt *keine* Kreis-Geometrie mit genau vier Punkten und genau fünf Kreisen.
2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Kreis-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Kreis-Geometrie-Axiomen?

   Je zwei verschiedene Kreise haben genau einen Punkt gemeinsam.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. *Angenommen* es gäbe eine Kreis-Geometrie mit genau vier Punkten und genau fünf Kreisen. Es gibt nur $\binom{4}{3} = 4$ drei-elementige Teilmengen der vier Punkte. Bei fünf Kreisen gibt es wegen K 1 somit mindestens zwei, auf denen dieselben drei Punkte liegen. Nach K 3 stimmen diese Kreise aber bereits überein, im Widerspruch zur Annahme. Also kann es eine solche Kreis-Geometrie nicht geben.
2. Ein *Modell für Kreis-Geometrie* ist ein Tripel $(P, K, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge K und einer Relation „ $\sqsubset$ “ $\subset P \times K$, mit folgenden Eigenschaften:
   - Ist $C \in K$, so gibt es mindestens drei verschiedene Elemente $x, y, z \in P$ mit $x \sqsubset C$, $y \sqsubset C$, $z \sqsubset C$.
   - Sind $C_1, C_2 \in K$ und sind $x, y, z \in P$ drei verschiedene Elemente mit $x, y, z \sqsubset C_1$ und $x, y, z \sqsubset C_2$, so gilt bereits $C_1 = C_2$.

3. Ja, dieser Satz ist unabhängig von den Kreis-Geometrie-Axiomen, denn:

   - In dem Modell $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ist der Satz erfüllt.
   - In dem Modell $(\{0, 1, 2, -1\}, \{\{0, 1, 2\}, \{0, -1, 2\}\}, \in)$ ist der Satz *nicht* erfüllt.

Aufgabe 2 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte). Zu $n, m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Graphen

$$K_{m,n} := \big(((\{1,\dots,m\} \times \{0\}) \cup (\{1,\dots,n\} \times \{1\}),$$
$$\{\{(j,0),(k,1)\} \mid j \in \{1,\dots,m\}, k \in \{1,\dots,n\}\}\big).$$

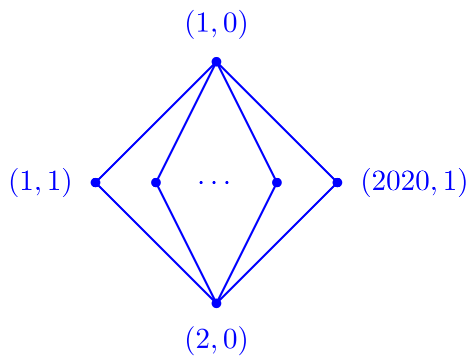
1. Zeigen Sie, dass $K_{2,2020}$ planar ist, indem Sie eine entsprechende planare Einbettung skizzieren (inklusive Beschriftung der Knoten).
2. Gibt es eine planare Einbettung von $K_{2,2020}$ mit genau 2021 Facetten?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Ist $K_{3,2020}$ planar?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Ein Beispiel für eine planare Einbettung ist:



2. Nein, denn: Sei f eine planare Einbettung von $K_{2,2020}$ und sei F die Anzahl der Facetten von f. Nach dem eulerschen Polyedersatz gilt

$$\begin{aligned} 2 &= \text{Anzahl der Knoten von } K_{2,2020} - \text{Anzahl der Kanten von } K_{2,2020} + F \\ &= 2 + 2020 - 2 \cdot 2020 + F, \end{aligned}$$

   und damit $F = 2020$.

3. Nein, denn: *Angenommen* $K_{3,2020}$ wäre planar. Dann wäre auch jeder Teilgraph von $K_{3,2020}$ planar. Es ist jedoch $K_{3,3}$ ein Teilgraph von $K_{3,2020}$ und $K_{3,3}$ ist bekanntlich nicht planar. Dieser Widerspruch zeigt, dass $K_{3,2020}$ nicht planar ist.

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned} [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (3 \cdot t^2, 4 \cdot t^2) \end{aligned}$$

und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es eine Isometrie $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_1)$ (Achtung: d_1, nicht d_2 !), die sowohl $f(0,0) = (0,0)$ als auch $f(1,0) = (1,1)$ erfüllt?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\gamma \colon [0, L] \longrightarrow X$ eine Geodäte. Geben Sie einen Beweis dafür, dass γ die Länge L hat.

Lösung:

1. Sei γ die gegebene Kurve. Dann ist γ stetig differenzierbar. Mit der analytischen Beschreibung der Länge von Kurven folgt somit, dass

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_1^2 \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2 \, dt = \int_1^2 \big\|(6 \cdot t, 8 \cdot t)\big\|_2 \, dt = \int_1^2 \sqrt{36 \cdot t^2 + 64 \cdot t^2} \, dt \\ &= \int_1^2 10 \cdot t \, dt = 5 \cdot t^2 \, \Big|_{t=1}^{t=2} = 15. \end{aligned}$$

   [Alternativ kann man auch sehen, dass es sich bei γ nur um eine Parametrisierung eines geraden Segments handelt und dann damit argumentieren.]

2. Nein, denn: *Angenommen* es gäbe eine solche Isometrie f. Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 &= d_1\big((0,0),(1,0)\big) \\ &= d_1\big(f(0,0), f(1,0)\big) && \text{(da } f \text{ eine Isometrie ist)} \\ &= d_1\big((0,0),(1,1)\big) && \text{(nach Vorausssetzung an } f\text{)} \\ &= 2, \end{aligned}$$

   was nicht sein kann. Also gibt es keine solche Isometrie.

3. Nach Definition ist

$$L(\gamma) = \sup\left\{\sum_{j=0}^{n-1} d\big(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})\big) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ und } t_0, \dots, t_n \in [T_0, T_1] \right.$$
$$\left. \text{mit } t_0 \leq t_q \leq \dots \leq t_n \right\}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $t_0, \dots, t_n \in [0, L]$ mit $t_0 \leq \dots \leq t_n$. Da γ eine Geodäte ist, folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} d\big(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})\big) = \sum_{j=0}^{n-1} |t_j - t_{j+1}| = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = t_n - t_0$$
$$\leq L.$$

Also ist $L(\gamma) = \sup \dots \leq L$.

Umgekehrt ist $L(\gamma) = \sup \dots \geq d(\gamma(0), \gamma(L)) = L - 0 = L$.

Beide Ungleichungen zusammen ergeben $L(\gamma) = L$.

Aufgabe 4 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Durch welche Formel kann man die Punktspiegelung in $\mathbb{R}^2$ an x beschreiben?

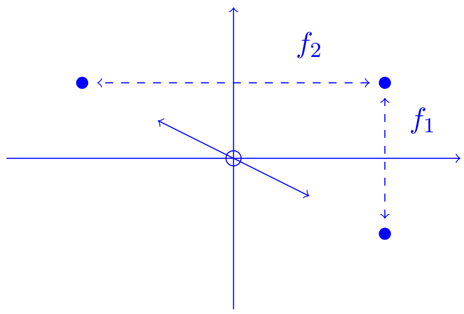
2. Beweisen Sie, dass die Punktspiegelung in $\mathbb{R}^2$ an $(0,0)$ als Komposition zweier Spiegelungen an affinen Geraden dargestellt werden kann; geben Sie dabei auch die von Ihnen verwendeten affinen Gerade an. Illustrieren Sie zusätzlich Ihre Argumente durch eine geeignete Skizze!

3. Leiten Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ aus dem Kongruenzsatz SSS und dem Sinussatz ab.

Lösung:

1. Die Punktspiegelung an x in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\longmapsto -(y-x)+x = -y + 2 \cdot x. \end{aligned}$$

2. Wir verwenden die Spiegelung f_1 an der affinen Geraden $\mathbb{R} \cdot (1,0)$ und die Spiegelung f_2 an der affinen Geraden $\mathbb{R} \cdot (0,1)$. Dann sind f_1 und f_2 gegeben durch
$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,-y) \end{aligned}$$
bzw.
$$\begin{aligned} f_2 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (-x,y) \end{aligned}$$
Insbesondere gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dass
$$f_2 \circ f_1(x,y) = f_2(x,-y) = (-x,-y),$$
was die Punktspiegelung von (x,y) an $(0,0)$ ist. Dies lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:



3. Seien Δ und Δ' geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, deren Eckpunkte jeweils nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Seien a, b, c die Seiten von Δ und seien a', b', c' die Seiten von Δ'. Seien α, β, γ bzw. α', β', γ' die entsprechenden gegenüberliegenden Winkel in Δ bzw. Δ'. Es gelte die WSW-Bedingung

$$\beta = \beta', \qquad \|a\|_2 = \|a'\|_2, \qquad \gamma = \gamma'.$$

Nach dem Kongruenzsatz SSS genügt es zu zeigen, dass $\|b\|_2 = \|b'\|_2$ und $\|c\|_2 = \|c'\|_2$ gilt.

Aus dem Sinussatz und der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken erhalten wir

$$\frac{\|b\|_2}{\|a\|_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi - \beta - \gamma)}.$$

Mit der SWS-Voraussetzung und dem Sinussatz in Δ' folgt daraus

$$\begin{aligned} \|b\|_2 &= \|a\|_2 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\pi - \beta - \gamma)} \\ &= \|a'\|_2 \cdot \frac{\sin\beta'}{\sin(\pi - \beta' - \gamma')} \\ &= \|b'\|_2. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\|c\|_2 = \|c'\|_2$.

Aufgabe 5 ($1 + 4 + 4 + 1 = 10$ Punkte).

1. Wie sind geodätische Dreiecke in metrischen Räumen definiert?
2. Formulieren Sie den Satz von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke.
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung des Satzes von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke.

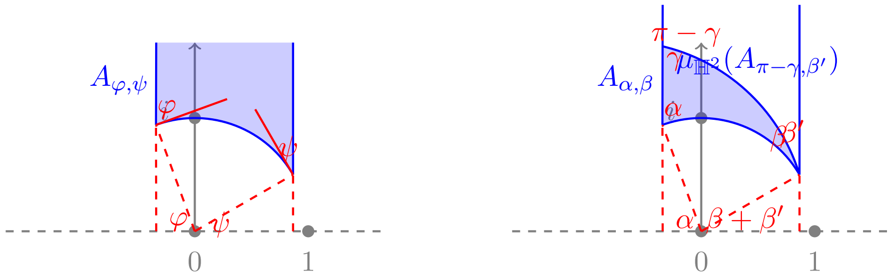
Lösung:

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein *geodätisches Dreieck in* (X, d) ist ein Tripel $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ bestehend aus drei Geodäten $\gamma_0 \colon [0, L_0] \longrightarrow X$, $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow X$ und $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow X$ in (X, d) mit
$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

2. Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H), dessen Bild nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten ist; seien α, β, γ die durch Δ definierten Winkel. Dann gilt
$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$
Insbesondere gilt:
   - Die Winkelsumme in hyperbolischen geodätischen Dreiecken ist kleiner als π und
   - der Flächeninhalt hyperbolischer geodätischer Dreiecke ist durch π nach oben beschränkt.

   [Da nicht allen klar war, dass auch die beiden Zusatzaussagen gefragt waren, wurde dieser Punkt im Notenschlüssel berücksichtigt.]

3. Wir bestimmen zunächst den Flächeninhalt gewisser verallgemeinerter Dreiecke, die einen „Eckpunkt auf dem Rand der hyperbolischen Ebene“ haben (s. linke Abbildung), und leiten dann daraus mit einem Zerlegungsargument den Fall geodätischer Dreiecke ab (s. rechte Abbildung).



Im linken Fall wird dabei der Flächeninhalt durch ein explizites Integral als $\pi - (\varphi + \psi)$ ausgerechnet; das Zerlegungsargument und die Bestimmung der Beziehungen zwischen den auftretenden Winkeln beruht auf elementargeometrischen Überlegungen in $\mathbb{H}^2$ bzw. $(\mathbb{R}^2, d_2)$ (da das Halbebenenmodell winkeltreu ist).

Dass wir geodätische Dreiecke immer als in der skizzierten Lage voraussetzen können, liegt an den Transitivitätseigenschaften der Möbiustransformationen.

4. Hyperbolische geodätische Dreiecke sind dünn.

   [Alternativ zum Beispiel auch: Die euklidische Ebene und die hyperbolische Ebene sind nicht lokal isometrisch.]

Aufgabe 6 (4 + 2 + 4 = 10 Punkte).

1. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und ist $f_A = \mathrm{id}_H$, so folgt $A \in \{+E_2, -E_2\}$, wobei $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Seien $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Folgern Sie, dass genau dann $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$ gilt, wenn $A \cdot B = \pm\, B \cdot A$ ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für eine Möbiustransformation f mit $f(i) = 1+2\cdot i$.

   Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie f geometrisch!

Lösung:

1. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $f_A = \mathrm{id}_H$. Nach Definition der Möbiustransformationen gilt dann für alle $z \in H$, dass
$$z = f_A(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$
bzw.
$$c \cdot z^2 + (a - d) \cdot z + b = 0.$$
Da diese polynomiale Gleichung für unendlich viele komplexe Zahlen erfüllt ist, müssen alle Koeffizienten gleich 0 sein, d.h.
$$c = 0, \quad b = 0, \quad a = d.$$
Wegen $1 = \det A = a \cdot d - b \cdot c = a^2$ folgt $d = a = 1$ oder $d = a = -1$. Insgesamt zeigt dies, dass $A \in \{+E_2, -E_2\}$.
2. Ist $A \cdot B = \pm B \cdot A$, so gilt aufgrund der Kompositionseigenschaften von Möbiustransformationen und wegen $f_C = f_{-C}$ für alle $C \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, dass
$$f_A \circ f_B = f_{A \cdot B} = f_{\pm B \cdot A} = f_{B \cdot A} = f_B \circ f_A.$$
Es gelte umgekehrt $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$. Mit den Kompositionseigenschaften von Möbiustransformationen folgt somit
$$\mathrm{id}_H = f_A \circ f_B \circ (f_A)^{-1} \circ (f_B^{-1}) = f_{A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1}}.$$
Der erste Teil liefert dann $A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} = \pm E_2$, und damit $A \cdot B = \pm B \cdot A$.

3. Wir betrachten die Möbiustransformation $f := f_{A \cdot B}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$f_{A \cdot B}(i) = f_A \circ f_B(i) = f_A(2 \cdot i) = 2 \cdot i + 1.$$

D.h. f skaliert zunächst um 2 und verschiebt dann horizontal um 1.