Nachklausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 6. Oktober 2021

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte). Die Sprache von *Scheiben-Geometrie* enthält *Punkte*, *Scheiben* und die Beziehung *„liegt in"* zwischen Punkten und Scheiben sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Scheiben-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

S 1 In jeder Scheibe liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.

S 2 Je zwei verschiedene Scheiben haben genau einen Punkt gemeinsam.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Scheiben-Geometrie: Eine Scheiben-Geometrie mit zwei verschiedenen Scheiben hat mindestens drei verschiedene Punkte.

2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Scheiben-Geometrie ist.

3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Scheiben-Geometrie-Axiomen?

   Je drei Scheiben haben mindestens einen Punkt gemeinsam.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 ($3 + 1 + 4 + 2 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie den graphentheoretischen Heiratssatz!
2. Wie sind Matchings in diesem Kontext definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des graphentheoretischen Heiratssatzes (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Geben Sie ein Beispiel für eine Situation mit einem nicht-planaren Graphen, die die graphentheoretische Heiratsbedingung erfüllt.

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)**.**

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von
$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto 3 \cdot \big(\cos(2 \cdot t), \sin(2 \cdot t)\big)\end{aligned}$$
und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es Punkte $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ mit (Achtung: d_1, nicht d_2 !), die folgendes erfüllen?
$$d_1(x_1, x_2) = 2, \quad d_1(x_2, x_3) = 5, \quad d_1(x_3, x_1) = 1$$
Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f \in \operatorname{Isom}(X, d)$ und sei $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ eine rektifizierbare Kurve in (X, d). Geben Sie einen Beweis dafür, dass dann auch $f \circ \gamma$ rektifizierbar ist und dass $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$ gilt.

Aufgabe 4 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte). Sei $W := [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie: Sind $x, y \in W$, so gilt $d_2(x,y) \leq \sqrt{3}$.
2. Zeigen Sie: Ist $X \subset W$ mit $|X| \geq 9$, so gibt es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $d_2(x,y) \leq \sqrt{3}/2$.
3. Gibt es eine Isometrie $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^3, d_2)$ mit folgenden Eigenschaften?

   $$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(-e_1) = e_1 \quad \text{und} \quad \forall_{x \in W} \quad f(x) \in W$$

   (Dabei bezeichnet $e_1 := (1,0,0)$ den ersten Standardeinheitsvektor.)

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 (1 + 4 + 5 = 10 Punkte).

1. Wie sind geodätische Dreiecke in metrischen Räumen definiert?
2. Gibt es ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) mit Flächeninhalt 2, bei dem zwei der drei Innenwinkel $\pi/3$ sind?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und (H, d_H) *nicht* lokal isometrisch sind!

Aufgabe 6 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und $z \in H$. Zeigen Sie, dass $f_A(z) \in H$; dabei ist f_A die durch A definierte Möbiustransformation.

2. Geben Sie Beispiele für $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $f_A \circ f_B \neq f_B \circ f_A$.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Existiert eine Möbiustransformation f mit

   $$f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i+1)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i-1) \quad \text{und} \quad f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i-1)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i+1) \ ?$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis. Erst zeichnen, dann rechnen!