Nachklausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel | 6. Oktober 2021

Name: | Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ | Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: | Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte). Die Sprache von *Scheiben-Geometrie* enthält *Punkte*, *Scheiben* und die Beziehung *„liegt in“* zwischen Punkten und Scheiben sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Scheiben-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

S 1 In jeder Scheibe liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.

S 2 Je zwei verschiedene Scheiben haben genau einen Punkt gemeinsam.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Scheiben-Geometrie: Eine Scheiben-Geometrie mit zwei verschiedenen Scheiben hat mindestens drei verschiedene Punkte.

2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Scheiben-Geometrie ist.

3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Scheiben-Geometrie-Axiomen?

   Je drei Scheiben haben mindestens einen Punkt gemeinsam.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Seien S_1, S_2 zwei verschiedene Scheiben und bezeichne $P(S_j)$ die Anzahl der Punkte, die in S_j liegen. Dann ist die Anzahl der Punkte insgesamt nach S 2 mindestens $P(S_1) + P(S_2) - 1$. Nach S 1 ist

   $$P(S_1) + P(S_2) - 1 \geq 2 + 2 - 1 = 3.$$

   Also hat diese Scheibengeometrie mindestens drei verschiedene Punkte.

2. Ein *Modell für Scheiben-Geometrie* ist ein Tripel $(P, D, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge D und einer Relation „$\sqsubset$“ $\subset P \times D$, mit den folgenden Eigenschaften:

   - Ist $S \in D$, so gibt es mindestens zwei verschiedene Elemente $x, y \in P$ mit $x \sqsubset S$ und $y \sqsubset S$.
   - Sind $S_1, S_2 \in D$ mit $S_1 \neq S_2$, so gibt es genau ein $x \in P$, das $x \sqsubset S_1$ und $x \sqsubset S_2$ erfüllt.

3. Ja, dieser Satz ist unabhängig von den Scheiben-Geometrie-Axiomen, denn:

   - In dem Modell $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ist der Satz erfüllt.
   - In dem Modell $(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}, \in)$ ist der Satz *nicht* erfüllt.

Aufgabe 2 ($3 + 1 + 4 + 2 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie den graphentheoretischen Heiratssatz!
2. Wie sind Matchings in diesem Kontext definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des graphentheoretischen Heiratssatzes (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Geben Sie ein Beispiel für eine Situation mit einem nicht-planaren Graphen, die die graphentheoretische Heiratsbedingung erfüllt.

Lösung:

1. Sei $X = (V, E)$ ein endlicher Graph und sei $F \subset V$ mit der Eigenschaft, dass X keine Kante zwischen zwei Knoten in F enthält. Dann existiert genau dann ein Matching für F in X, wenn die *(graphentheoretische) Heiratsbedingung*

$$\forall_{A \subset F} \quad |N_X(A)| \geq |A|$$

für F in X erfüllt ist. (Dabei ist $N_X(A) := \{w \in V \mid \exists_{v \in A} \quad \{w, v\} \in E\}$ die Menge aller zu A benachbarten Knoten in X.)

2. Sei $X = (V, E)$ ein Graph. Sei $F \subset V$. Ein *Matching für F in X* ist eine Menge $H \subset E$ von Kanten mit folgenden Eigenschaften: Jeder Knoten aus F ist in einer Kante aus H enthalten und

$$\forall_{e, e' \in H} \quad e \neq e' \Longrightarrow e \cap e' = \emptyset.$$

3. Es ist klar, dass die Heiratsbedingung notwendig ist für die Existenz eines Matchings.

   Warum ist die Heiratsbedingung hinreichend? Um dies nachzuweisen, gehen wir induktiv vor (über die Anzahl $|F|$).

   Induktionsanfang. Ist $|F| \leq 1$, so gilt die Behauptung offensichtlich.

   Induktionsvoraussetzung. Sei also $|F| \geq 2$ und die Heiratsbedingung sei in allen Fällen mit kleinerer „Frauenmenge“ als hinreichend nachgewiesen.

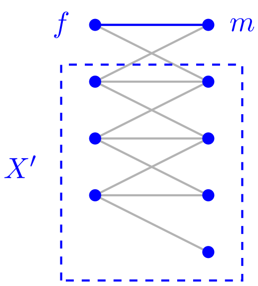
   Induktionsschritt. Dann ist die Heiratsbedingung auch für F hinreichend, denn: Wir unterscheiden zwei Fälle (diese decken alle Möglichkeiten ab!):

① Es gelte die stärkere Heiratsbedingung

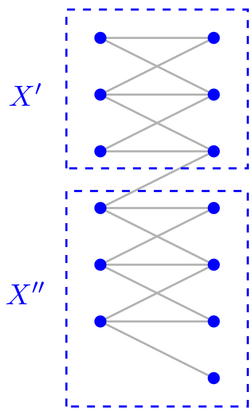
$$|N_X(A)| \geq |A| + 1$$

für alle nicht-leeren Teilmengen $A \subset F$ mit $A \neq F$. Wir wählen in diesem Fall eine Kante $\{f, m\} \in E$ mit $f \in F$ und betrachten den Graphen X', den wir aus X erhalten, indem wir die Knoten f, m und alle mit f oder m verbundenen Kanten aus X entfernen.

Man kann die Induktionsvoraussetzung auf $F \setminus \{f\}$ in X' anwenden (da die stärkere Heiratsbedingung erfüllt ist!) und kann ein so erhaltenes Matching um $\{f, m\}$ ergänzen.



Fall ①



Fall ②

② Es gebe eine nicht-leere Teilmenge $A \subset F$ mit $A \neq F$ und

$$|N_X(A)| = |A|.$$

Wir zerlegen nun X mithilfe von A (und $N_X(A)$) bzw. $F \setminus A$ in zwei Graphen X' und X''.

Für X' und X'' ist dann die entsprechende Heiratsbedingung erfüllt (für X'' aufgrund von $|N_X(A)| = |A|$) und per Induktion erhält man Matchings für X' bzw. X''. Diese Matchings fügen sich zu einem Matching für F in X zusammen.

4. Sei $X := K_5$. Dann ist X nicht planar.

   Sei $F := \emptyset$. Dann ist die graphentheoretische Heiratsbedingung offenbar für F in X erfüllt.

Aufgabe 3 $(2+4+4=10$ Punkte$)$**.**

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto 3 \cdot \big(\cos(2\cdot t), \sin(2\cdot t)\big) \end{aligned}$$

   und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es Punkte $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ mit (Achtung: d_1, nicht d_2 !), die folgendes erfüllen?

$$d_1(x_1,x_2) = 2, \quad d_1(x_2,x_3) = 5, \quad d_1(x_3,x_1) = 1$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Sei (X,d) ein metrischer Raum, $f \in \operatorname{Isom}(X,d)$ und sei $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ eine rektifizierbare Kurve in (X,d). Geben Sie einen Beweis dafür, dass dann auch $f \circ \gamma$ rektifizierbar ist und dass $L(\gamma) = L(f\circ\gamma)$ gilt.

Lösung:

1. Sei γ die gegebene Kurve. Dann ist γ stetig differenzierbar. Mit der analytischen Beschreibung der Länge von Kurven folgt somit, dass

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2 \, dt = \int_0^1 \big\|3\cdot(-2\cdot\sin(2\cdot t), 2\cdot\cos(2\cdot t))\big\|_2 \, dt \\ &= \int_0^1 3\cdot 2\sqrt{\sin^2(2\cdot t) + \cos^2(2\cdot t)} \, dt = 6 \cdot \int_0^1 1 \, dt = 6. \end{aligned}$$

2. Nein, denn: *Angenommen* es gäbe solche Punkte. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung für d_1, dass

$$5 = d_1(x_2,x_3) \le d_1(x_2,x_1) + d_1(x_1,x_3) = d_1(x_1,x_2) + d_1(x_1,x_3) = 2+1 = 3$$

   was nicht sein kann. Also gibt es keine solchen Punkte.

3. Da f als Isometrie stetig ist, ist auch die Komposition $f \circ \gamma$ stetig. Mit der Definition der Länge und der Voraussetzung, dass f eine Isometrie ist, erhalten wir

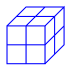
$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \sup\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d\big(f \circ \gamma(t_j), f \circ \gamma(t_{j+1})\big) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, t_0 \leq \cdots \leq t_n \in [0,1] \right\} \\ &= \sup\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d\big(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})\big) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, t_0 \leq \cdots \leq t_n \in [0,1] \right\} \\ &= L(\gamma). \end{aligned}$$

Insbesondere ist mit γ auch $f \circ \gamma$ rektifizierbar.

Aufgabe 4 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)**.** Sei $W := [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie: Sind $x, y \in W$, so gilt $d_2(x,y) \leq \sqrt{3}$.
2. Zeigen Sie: Ist $X \subset W$ mit $|X| \geq 9$, so gibt es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $d_2(x,y) \leq \sqrt{3}/2$.
3. Gibt es eine Isometrie $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^3, d_2)$ mit folgenden Eigenschaften?
$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(-e_1) = e_1 \quad \text{und} \quad \forall_{x \in W} \quad f(x) \in W$$
(Dabei bezeichnet $e_1 := (1,0,0)$ den ersten Standardeinheitsvektor.)
Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Seien $x, y \in W$. Dann ist $|x_j - y_j| \leq 1$ für alle $j \in \{1,2,3\}$. Somit folgt
$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} (x_j - y_j)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} |x_j - y_j|^2} \leq \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$
2. Wir zerlegen W in acht Würfel der Seitenlänge $1/2$:

Wegen $|X| \geq 9$ folgt mit dem Schubfachprinzip, dass es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt, die im selben dieser acht Würfel liegen. Mit dem ersten Aufgabenteil und den Skalierungseigenschaften von d_2 folgt somit
$$d_2(x,y) \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}.$$
3. Nein, denn: Sei $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit
$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_{x \in W} \quad f(x) \in W.$$
Wir zeigen, dass dann $f(-e_1) \neq e_1$ gilt: Nach der ersten Eigenschaft und der Starrheit von Isometrien der euklidischen Ebene ist f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Somit folgt mithilfe der zweiten Eigenschaft, dass
$$f(-e_1) = -f(e_1) \in -W.$$
Offenbar ist $e_1 \notin -W$. Also ist $f(-e_1) \neq e_1$.

Aufgabe 5 ($1 + 4 + 5 = 10$ Punkte)**.**

1. Wie sind geodätische Dreiecke in metrischen Räumen definiert?
2. Gibt es ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) mit Flächeninhalt 2, bei dem zwei der drei Innenwinkel $\pi/3$ sind?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und (H, d_H) *nicht* lokal isometrisch sind!

Lösung:

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein *geodätisches Dreieck in* (X, d) ist ein Tripel $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ bestehend aus drei Geodäten $\gamma_0 \colon [0, L_0] \longrightarrow X$, $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow X$ und $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow X$ in (X, d) mit

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

2. Nein, denn: Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H). Ist das Bild von Δ in einer gemeinsamen Geodäten enthalten, so ist $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = 0 \neq 2$.

   [Bei den gegebenen Winkeln kann dieser erste Fall nicht auftreten, aber es ist einfacher, so zu argumentieren.]

   Sei nun das Bild von Δ nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten und seien α, β, γ die durch Δ definierten Winkel; außerdem seien zwei dieser drei Winkel $\pi/3$. Insbesondere ist somit $\alpha + \beta + \gamma \geq 2 \cdot \pi/3$. Mit dem Satz von Gauß-Bonnet in der hyperbolischen Ebene erhalten wir daher

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \leq \pi - 2/3 \cdot \pi = \pi/3 \leq 4/3 < 2.$$

3. Wir zeigen: Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset H$ nicht-leere offene Mengen. Dann gibt es *keine* Isometrie $(U, d_2) \longrightarrow (V, d_H)$.

   Angenommen, es gäbe eine Isometrie $f \colon (U, d_2) \longrightarrow (V, d_H)$. Insbesondere bildet diese Isometrie geodätische Dreiecke auf geodätische Dreiecke ab. Mit der metrischen Beschreibung der Winkel zwischen Geodäten in der euklidischen bzw. der hyperbolischen Ebene folgt außerdem, dass f auch winkeltreu ist.

   Da U nicht-leer und offen ist, enthält U ein euklidisches geodätisches Dreieck Δ, das nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist; dieses hat die Winkelsumme π. Das geodätische Dreieck Δ wird durch f auf ein geodätisches

Dreieck Δ' in (V, d_H) abgebildet, das auch nicht in einer einzigen Geodäten enthalten ist. Da f winkeltreu ist, hat somit auch Δ' Winkelsumme π, im Widerspruch zum Satz von Gauß-Bonnet.

Also gibt es *keine* solche Isometrie.

Aufgabe 6 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte).

1. Sei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und $z \in H$. Zeigen Sie, dass $f_A(z) \in H$; dabei ist f_A die durch A definierte Möbiustransformation.
2. Geben Sie Beispiele für $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $f_A \circ f_B \neq f_B \circ f_A$.

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Existiert eine Möbiustransformation f mit

   $$f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i+1)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i-1) \quad \text{und} \quad f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i-1)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i+1) \text{ ?}$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis. Erst zeichnen, dann rechnen!

Lösung:

1. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und $z \in H$. Nach Definition der Möbiustransformationen, wegen $a \cdot d - b \cdot d = \det A = 1$ und $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{Im}(\overline{z} + z) = 0$ gilt dann

   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}\big(f_A(z)\big) &= \mathrm{Im}\Big(\frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\frac{(a \cdot z + b) \cdot (c \cdot \overline{z} + d)}{|c \cdot z + d|^2}\Big) \\ &= \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \mathrm{Im}(ac \cdot z \cdot \overline{z} + bc \cdot \overline{z} + ad \cdot z + bd) \\ &= \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \mathrm{Im}\big(bc \cdot (\overline{z} + z) + z\big) = \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \mathrm{Im}\, z. \end{aligned}$$

   Wegen $z \notin \mathbb{R}$ ist der Nenner größer als Null. Mit $\mathrm{Im}\, z > 0$ folgt somit, dass $\mathrm{Im}(f_A(z)) > 0$ bzw. $f_A(z) \in H$.
2. Seien

   $$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

   Dann gilt

   $$\begin{aligned} f_A \circ f_B(i) &= f_A(i+1) = -\frac{1}{i+1} = \frac{i-1}{2}, \\ f_B \circ f_A(i) &= f_B\Big(-\frac{1}{i}\Big) = f_B(i) = i + 1, \end{aligned}$$

   und damit $f_A \circ f_B(i) \neq f_B \circ f_A(i)$. Insbesondere ist $f_A \circ f_B \neq f_B \circ f_A$.

3. Ja, denn: Wir betrachten die Möbiustransformation $f := f_A$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$f_A\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i+1)\Big) = -\frac{1}{1/\sqrt{2} \cdot (i+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i-1)$$

und

$$f_A\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i-1)\Big) = -\frac{1}{1/\sqrt{2} \cdot (i-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (i+1).$$

[Diese Möbiustransformation ist die „hyperbolische Punktspiegelung“ an i.]