01.06.2021

<u>Wdh:</u> analyt. Hilfsmittel für Kurven:

- differenzierbare Kurven in Banachräumen
  $\rightsquigarrow$ Ableitung, ...
- $\rightsquigarrow$ analyt. Beschreibung der Länge: $\int_I \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$

## 3.2.3 Parametrisierung nach Bogenlänge

Idee:
- führen einen Äquivalenzbegriff für die Parametrisierung von Kurven ein
- spezielle Parametrisierung: Parametrisierung nach Bogenlänge

**Definition.** (Äquivalenz von Kurven). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, seien $\gamma : I \to V$, $\eta : J \to V$ stetig diffbare Kurven. Dann heißen $\gamma$ und $\eta$ <u>äquivalent</u>, wenn es einen $C^1$-Diffeomorphismus $\varphi : I \to J$ gibt mit

Umparametrisierung

$$\eta \circ \varphi = \gamma.$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dashed, "\exists\, C^1\text{-Diffeo}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, equal] \\ J \arrow[r, "\eta"'] & V \end{tikzcd}$$

(liefert eine Ä-rel auf Kurven!)

Proposition (Invarianz der Länge). Äquivalente Kurven in Banachräumen haben dieselbe Länge.

Beweis. • über die Def. der Länge

oder

• über die Integraldarstellung der Länge (Transformationssatz!). Substitutionsfreund $\square$

Definition (nach Bogenlänge parametrisiert). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine stetig diffbare Kurve $\gamma : I \to V$ ist <u>nach Bogenlänge parametrisiert</u>, wenn

$$\forall_{t \in I^\circ} \quad \boxed{\|\dot{\gamma}(t)\| = 1.}$$

vernünftiger Name, denn: In diesem Fall gilt:

$$\forall_{t \in [T_0, T_1] = I} \quad \underbrace{L\left(\gamma\big|_{[T_0, t]}\right)}_{\text{Länge} \to \text{Bogen}} = \int_{T_0}^{t} \underbrace{\|\dot{\gamma}(x)\|}_{=1} \, dx$$

$$= \int_{T_0}^{t} 1 \, dx = \boxed{t - T_0.}$$

**Satz.** (Ex./Eind. von Parametrisierungen nach Bogenlänge).
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, sei $\gamma : I \to V$ eine stetig differenzierbare Kurve, die regulär ist, d.h. $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

1. Dann ex. eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, die zu $\gamma$ äquivalent ist.

2. Seien $\gamma_1 : I_1 \to V$, $\gamma_2 : I_2 \to V$ zu $\gamma$ äquivalente Kurven, die nach Bogenlänge parametrisiert sind. Dann ex. $c \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ mit
   - $I_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid \varepsilon \cdot t + c \in I_1\}$
   - $\forall_{t \in I_2} \quad \gamma_2(t) = \gamma_1(\varepsilon \cdot t + c)$.

evtl. Ändern der Richtung — Verschieben

**Beweis der Existenz:**

$L := L(\gamma)$

Idee: Betrachten

$$\varphi : I = [T_0, T_1] \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}\ [0, L]$$
$$t \longmapsto \underbrace{L(\gamma|_{[T_0, t]})}_{\text{Bogenlänge von } \gamma}$$

$\leadsto$ $\varphi$ ist stetig diffbar mit $\varphi' = \overbrace{\|\dot\gamma\|}^{\text{hat keine NST}}$.

$\leadsto$ $\varphi$ ist $C^1$-Diffeo.

Dann ist $\gamma$ äquivalent zu

$$\eta := \gamma \circ \varphi^{-1} : [0, L] \longrightarrow V.$$

Zu zeigen: $\eta$ ist nach Bogenlänge parametrisiert.

Sei $t \in (0, L)$. Dann ist

$$\boxed{\|\dot{\eta}(t)\|} = \|\dot{(\gamma \circ \varphi^{-1})}(t)\|$$

Kettenregel

$$= \|\underbrace{(\varphi^{-1})'(t)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t))\|$$

$$= \underbrace{|(\varphi^{-1})'(t)|}_{= \frac{1}{\underbrace{\cancel{|}\varphi'(\varphi^{-1}(t))\cancel{|}}_{>0}}} \cdot \underbrace{\|\dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t))\|}_{= \varphi'(\varphi^{-1}(t))}$$

da $\varphi' = \|\dot{\gamma}\|$

$$\boxed{= 1}.$$

$\square$

## 3.2.4 Krümmung von Kurven

Idee: zweite Ableitung beschreibt die Krümmung

(Problem: zweite Ableitung hängt von der Parametrisierung ab

$\rightsquigarrow$ Einschränkung auf Par. nach Bogenlänge)

Definition. (Krümmung einer Kurve). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $\gamma : I \to V$ eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal diff-bare Kurve. Ist $t \in I^\circ$, so ist

$$K_\gamma(t) := \ddot{\gamma}(t) \in V$$

die <u>Krümmung</u> von $\gamma$ in $t$.

Proposition. (analyt. Char. von Geodäten). Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und sei $\gamma : [0, L] \to V$ eine nach Bogenlänge par. zweimal diff-bare Kurve. Dann sind äquivalent:

1. Die Kurve $\gamma$ ist eine metrische Geodäte.
2. Es gilt $K_\gamma = 0$.

„gerade"

$\leadsto$ Geodäten sind die „ungekrümmten" Kurven.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Als metrische Geodäte in einem Hilbertraum ist $\gamma$ affin linear (analog zu Prop. 2.2.6)

$\leadsto \ddot{\gamma} = 0$. $\leadsto K_\gamma = 0$.

$\gamma$ nach BL par.

• 2. ⇒ 1.: Sei $\underbrace{\kappa_\gamma}_{=\ddot\gamma} = 0$.

⇝ $\dot\gamma$ konstant

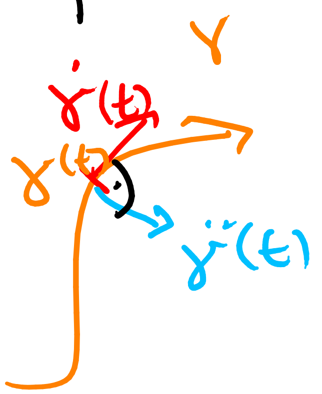
Lemma 3.2.6 ⇝ $\gamma$ affin linear.

⇝ $\gamma$ Geodäte. □

$\gamma$ nach BL par

**Proposition.** (Richtung ⊥ Krümmung). Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, sei $\gamma : I \to V$ ein nach BL par. zweimal diffbar Kurve. Dann gilt

$$\forall_{t \in I^\circ} \quad \dot\gamma(t) \perp \ddot\gamma(t).$$




**Beweis.** Idee: $t \mapsto \langle \dot\gamma(t), \ddot\gamma(t) \rangle$ als Ableitung einer konstanten Fkt erkennen!

Sei
$$S : I \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \underbrace{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle}_{= \|\dot\gamma(t)\|^2 \overset{BL}{=} 1}.$$

Dann ist $S$ differenzierbar und
$$\forall_{t \in I^\circ} \; 0 = S'(t) = 2 \cdot \langle \dot\gamma(t), \ddot\gamma(t) \rangle. \quad \square$$

Beispiel. (Krümmung euklid. Kreise). In $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot , \cdot \rangle)$:

Standardskalarprod.

Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$\gamma : [0, 2\pi r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto r \cdot \left( \cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r} \right)$$

⇝ Par. des Kreises um 0 vom Radius $r$.

⇝ $\gamma$ nach BL parametrisiert, denn:

$$\forall_{t \in (0, 2\pi r)} \quad \dot\gamma(t) = \cancel{r} \cdot \cancel{\tfrac{1}{r}} \left( -\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right)$$

Und:

$$\forall_{t \in (0, 2\pi r)} \quad \kappa_\gamma(t) = \ddot\gamma(t)$$

$$= -\frac{1}{r} \cdot \overbrace{\left( \cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r} \right)}^{\text{Länge } 1}.$$

⇝ $\|\kappa_\gamma(t)\| = \frac{1}{r}$.