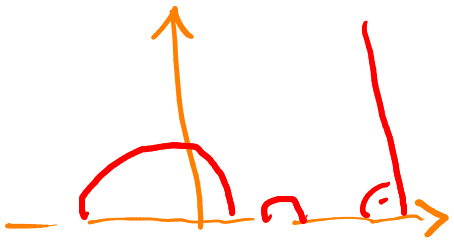
02.07.2021

Wdh: Bestimmung aller Geodäten/geodätischen Geraden in (H, d_H).



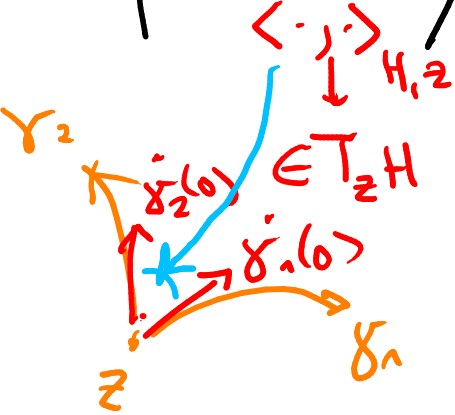
verallg. Halbkreis

Ziel: Bestimmung von $\mathrm{Isom}(H, d_H)$.

4.4.5 WINKEL

Winkel ↗ riemannsche Winkel (über die riemannsche Metrik/Skalarprodukte)
↘ metrische Winkel

Definition. (hyperbolische Winkel) Seien $\gamma_1 : [0, L_1] \to H$, $\gamma_2 : [0, L_2] \to H$ glatte Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0$, $\dot\gamma_2(0) \neq 0$.



Dann def. wir den hyperbolischen Winkel zw. γ_1 und γ_2 (i.e. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$) als

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle_{H, \gamma_1(0)}(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0))$$

$$= \arccos \frac{\langle \dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0) \rangle_{H, \gamma_1(0)}}{\|\dot\gamma_1(0)\|_{H,\gamma_1(0)} \cdot \|\dot\gamma_2(0)\|_{H,\gamma_1(0)}} \in [0, \pi]$$

$$\langle v, w\rangle_{H,z} = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2}\langle v, w\rangle_2$$

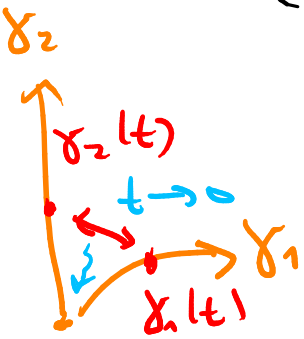
$$= \arccos \frac{\langle \dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\rangle_2}{(\operatorname{Im}(\gamma_1(0)))^2 \cdot \frac{1}{|\operatorname{Im}\gamma_1(0)|}\|\dot\gamma_1(0)\|_2 \cdot \frac{1}{|\operatorname{Im}\gamma_2(0)|}\|\dot\gamma_2(0)\|_2}$$

$$= \sphericalangle(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)).$$

mit Halbebenenmodell der hyp. Ebene ist Winkeltreu

(Es ist nicht längentreu!)

Proposition. (metr. Beschreibung hyp. Winkel). Seien $\gamma_1 : [0, L_1] \to H$, $\gamma_2 : [0, L_2] \to H$ Geodäten in (H, d_H) mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Dann ist



$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{t \to 0} \arccos\left(1 - \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{2 \cdot t^2}\right).$$

Beweis. • als Geodäten sind γ_1, γ_2 glatt und $\dot\gamma_1(0) \neq 0 \neq \dot\gamma_2(0)$. $\Rightarrow \sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2)$ ist def.

• Ohne Einschränkung sei $\gamma_1(0) = i = \gamma_2(0)$ (Transitivität der Möbiustrafos; (riemannsche) Isometrien

Möbiustrafos bilden Geodäten auf Geodäten ab;

Metrikräume sind riemannsche Isometrien und deshalb winkeltreu)

- Ohne Einschränkung sei $\dot\gamma_1(0) \neq \dot\gamma_2(0)$

(Klassif der Geodäten aus sonst

mit $\gamma_1|_{[0,\min\{L_1,L_2\}]} = \gamma_2|_{[0,\min\{L_1,L_2\}]}$

und dann ist die Beh. klar)

- Außerdem wissen wir:

$$\|\dot\gamma_1(0)\|_{H_{ij}} = 1 = \|\dot\gamma_2(0)\|_{H_{ij}}$$

(folgt aus der Klassif. der Geodäten)

Also:

$$\sphericalangle_H(\gamma_1,\gamma_2) = \arccos \langle \dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\rangle_{H_{ij}}$$

Polarisierung $\rightarrow$

$$= \arccos\left(1 - \frac{1}{2}\cdot \|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\|_2^2\right)$$

Idee: $\|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\|_2$ durch d_H ausdrücken!

Aus der trivialen/vertikalen Abschätzung folgt $(\dots)$:

$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} \exists_{T \in \mathbb{R}_{>0}}$

$\forall_{t \in [0,T]}$ $(1-\varepsilon) \cdot d_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$\leq (1+\varepsilon) \cdot d_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$$\rightsquigarrow \limsup_{t \to 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{d_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))} \leq 1+\varepsilon$$

$$\rightsquigarrow \text{Diff-quot.} \quad \limsup_{t \to 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t \cdot \|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\|_2} \leq 1+\varepsilon$$

$$\varepsilon \to 0 \rightsquigarrow \limsup_{t \to 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t \cdot \|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\|_2} \leq 1.$$

Analog

$$1 \leq \liminf_{t \to 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t \cdot \|\dot\gamma_1(0) - \dot\gamma_2(0)\|_2}.$$

Also $\lim_{t \to 0} \ldots = 1.$

bzw.: (*) $\lim_{t \to 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} = \|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2$.

Jetzt: nur noch einsetzen:

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) \overset{(s.o.)}{=} \arccos\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \|\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0)\|_2^2\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \arccos\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t \to 0} \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \arccos\left(1 - \frac{d_H(\gamma_1(t), \gamma_2(t))^2}{2t^2}\right).$$

Quadrieren und arccos sind stetig.

□

Korollar (Isometrien der hyp. Ebene sind winkeltreu). Sei $f \in \mathrm{Isom}(H, d_H)$ und seien γ_1, γ_2 Geodäten in (H, d_H) mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Dann gilt

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle_H(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2).$$

□

4.4.6 DIE ISOMETRIEGRUPPE DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Idee: $\mathrm{Isom}(H, d_H)$ bestimmen mithilfe von

- Geodäten
- Winkeltreue
- Transitivität der Möbiustrafos.

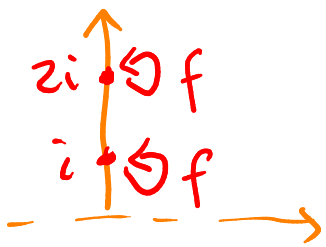
Satz. Die Gruppe $\mathrm{Isom}(H, d_H)$ wird von der Menge

$$\{f_A \mid A \in SL(2, \mathbb{R})\} \cup \{z \mapsto -\bar{z}\}$$

erzeugt.

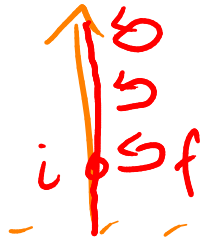
Insbesondere: $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{Isom}(H, d_H)$.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Isom}(H, d_H)$.



① Wegen der Transitivität (II) der Möbiustrafos können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$f(i) = i \quad \text{und} \quad f(2i) = 2i.$$

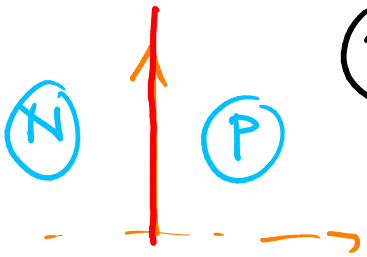


② f bildet Geod. auf Geod. ab

- Char. vert. Geoden

$\forall_{y \in \mathbb{R}_{>0}}$ $f(iy) = iy$ (①)

Idee: zeigen, dass $f = id_{\mathbb{H}}$ oder $f = (z \mapsto -\bar{z})$.
(das genügt um den Satz zu zeigen!)



③ Sei $P := \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$

$N := \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}\, z < 0\}$.

Dann sind P und N die Wegzshgskomp. von $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}_{>0} \cdot i$.

Da f ein Homöo ist und $f(\mathbb{R}_{>0} \cdot i) = \mathbb{R}_{>0} \cdot i$ ist, folgt:

ⓐ $f(P) = P$ und $f(N) = N$

oder

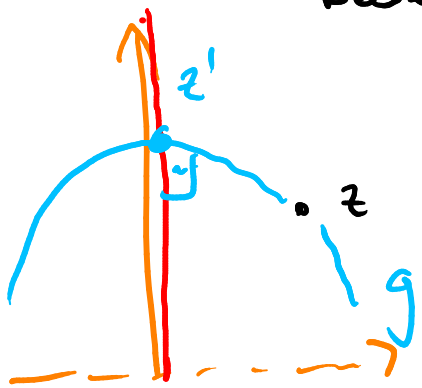
ⓑ $f(P) = N$ und $f(N) = P$.

Ohne Einschränkung gelte ⓐ

(sonst: Komp. mit $z \mapsto -\bar{z}$)

④ Beh: In dieser Situation gilt: $f = id_{\mathbb{H}}$

Beweis. Sei $z \in P$. Wir zeigen: $f(z) = z$



($z \in N$ geht analog)

Es ex. genau ein geod. Gerade g durch z, die die imaginäre Achse orth. schneidet. (Klassif. der Geod.)

Sei z' der Schnittpkt von $g(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}_{>0} \cdot i$.

- Was ist $f \circ g$?

- grad. Gerade, die
- die imaginäre Achse in z' schneidet (da $f(z') = z'$)
- und dieser Schnitt ist orth. (da mehr. Isometrien winkeltreu sind!)

Klassif. der Grad. $\Rightarrow$ $f \circ g(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$.

- und $f(z) \in P$ und

$$d_H(f(z), f(z')) = d_H(z, z').$$

Wie finden wir z? Von z' aus $d_H(z, z')$ auf g in P zurücklegen

bleibt unter f erhalten

$\rightsquigarrow f(z) = z$.

□

Wichtige Folgerung: Unabhängigkeit des Parallelenaxioms !

(Zeugen: euklid. Ebene, hyp. Ebene)

4.5 HYPERBOLISCHE DREIECKE

Idee: hyp. Ebene besser verstehen, indem wir grad. Dreiecke besser verstehen

Ergebnisse:

- Der Flächeninhalt hyp. Dreiecke ist $< \pi$ (!!)
- Genauer: Flächeninhalt und Winkelsumme hängen zusammen
  → NICHTS konstant
  (Satz von Gauß-Bonnet)
- "Hyp. Dreiecke sind dünn"
- es gibt "mehr" reguläre Polygone und mehr reguläre Pflasterungen als in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.