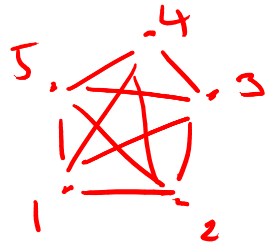
04.05.2021

Wdh.: Sei X ein endlicher Graph.
Dann ist X **planar**, wenn er in $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden kann, d.h. wenn es eine stetige und injektive Abb. $X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$ gibt.

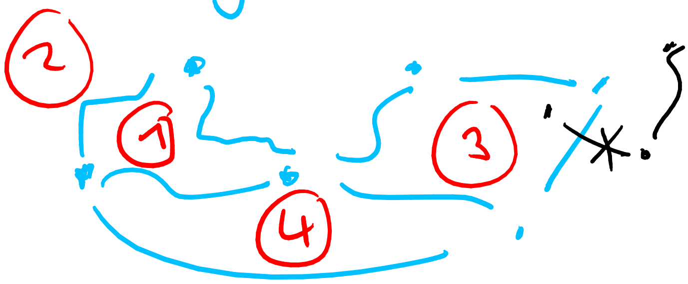
$X_{\mathbb{R}}$ ← geometr. Realisierung

• Was ist mit K_5?



1.7.2 Der Eulersche Polyedersatz

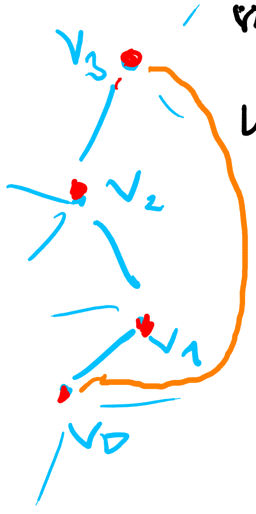
Idee: für planare Einbettungen: untersuchen den Zshg zw. #Knoten, #Kanten, #„Gebiete" ?!



Weg = stetige Abb. $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus f(X_{\mathbb{R}})$

Definition. (Facetten einer planaren Einbettung).
Sei $f: X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$ eine planare Einb. eines endl. Graphen X. Die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus f(X_{\mathbb{R}})$ heißen **Facetten** von f.

Definition. Sei $X = (V, E)$ ein Graph.
• Ein **Weg** in X ist eine endliche Folge $(v_0, \dots, v_n)$



von verschiedenen Knoten $v_0, \ldots, v_n \in V$ mit

$$\forall_{j \in \{0,\ldots,n-1\}} \{v_j, v_{j+1}\} \in E.$$

- Ein <u>Kreis in</u> X ist ein Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ in X mit $\{v_n, v_0\} \in E$.

- Der Graph X ist <u>zusammenhängend</u>, wenn es für alle $v, w \in V$ einen Weg von v nach w in X gibt.

Weg von v nach v ? z.B. der Weg (v) der Länge 0.

wird gebraucht! (z.B. • •)

Satz. (eulerscher Polyedersatz). Sei $X = (V, E)$ ein mit $V \neq \emptyset$ endlicher, zusammenhängender, planarer Graph. Sei $f : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung von X und sei F die Anzahl der Facetten von f. Dann gilt:

$$\underset{\dim 0}{|V|} - \underset{\dim 1}{|E|} + \underset{\dim 2}{F} = 2$$

Insbesondere: F hängt nicht von f ab!

Beweis. (Per Induktion über die Anzahl der Kanten)

- Induktionsanfang: Sei $|E| = 0$. Dann ist $|V| = 1$

  $\geq$: da $V \neq \emptyset$

  $\leq$: da X zshgd. ist.

  In diesem Fall ist $F = 1$ ($\mathbb{R}^2 \setminus \{pt\}$ hat genau eine Wegzshgs.komp.).

  Also: $|V| - |E| + F = 1 - 0 + 1 \boxed{= 2}$.

- Induktionsvoraussetzung: Sei $X = (V, E)$ ein endl., zshgder, planarer Graph mit $|E| \geq 1$ und die Beh. sei für weniger Kanten bereits gezeigt.

- Induktionsschritt: Dann gilt die Beh auch für X, denn: Wir unterscheiden zwei Fälle:

  (1) Es ex. ein Knoten $v \in V$ vom Grad 1.

  Sei e die Kante, die v enthält. Wir betrachten

  $$X' := (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\}).$$

  Dann ist X' endlich, zshgd, planar und hat weniger Kanten als X. Also:

$$\underline{\boxed{|V| - |E| + F}} = \underbrace{|V \setminus \{v\}| - |E \setminus \{e\}| + \cancel{1 - 1} + F}_{} \boxed{= 2}$$

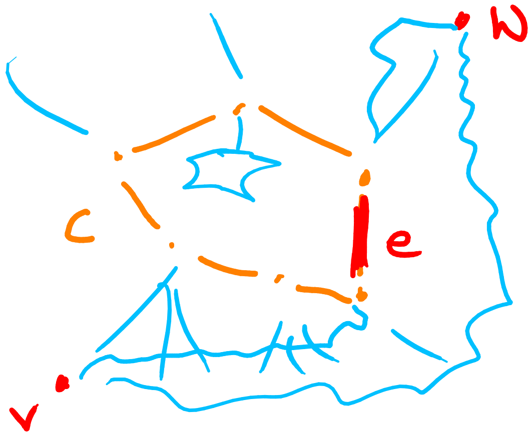
I.V. für X'

Anzahl der Facetten von $f|_{X'_{\mathbb{R}}}$ (Jordanscher Kurvensatz!)

② Es ex. kein Knoten in X vom Grad 1.

Dann haben alle Knoten in X Grad ≥ 2.

$\rightsquigarrow$ X enthält einen Kreis c.



Sei e ein Kante von c.

Wir betrachten

$$X' := (V, E\setminus\{e\}).$$

Dann ist X' endlich, planar und zshgd (im Zweifel e durch „den Rest von c ersetzen")

Wir betrachten $f' := f|_{X'_{\mathbb{R}}} : X'_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$.

Dann gilt

$$\boxed{|V|-|E|+F} = |V| - |E\setminus\{e\}| - 1 + F$$

$$= |V| - |E\setminus\{e\}| + \underbrace{F - 1}_{\substack{= \text{ Anzahl der Facetten von } f' \\ \text{(Jordanscher Kurvensatz)}}}$$

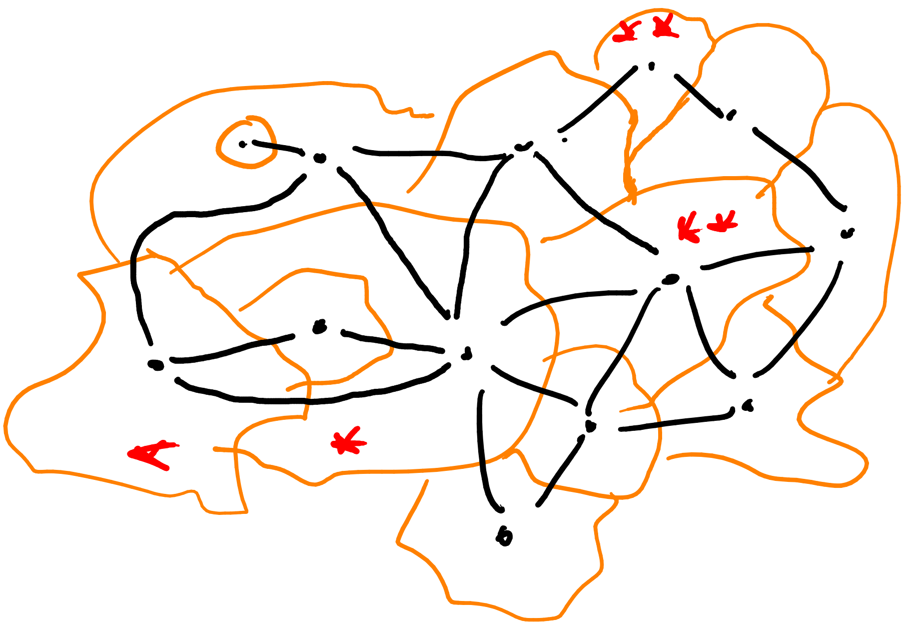
$$\overset{\text{I.V. für } X'}{=} \boxed{2}$$

angewendet auf $f(c)$

$\square$

$\boxed{1.7.3}$ ANWENDUNGEN: FÄRBUNGEN & NICHT-PLANARITÄT

Frage: Wieviele Farben sind nötig, um eine Landkarte zu färben?
(aneinandergrenzende Länder sollen dabei verschiedene Farben haben).



Idee: Länder ⇝ Knoten

∃ eine gem. Grenze positiver Länge ⇝ Kanten

mit angrenzenden Ländern

(!)

Landkarte ⇝ planarer Graph

Färbungsproblem ⇝ wieviele Farben sind nötig, um die Knoten eines planaren Graphen so zu färben, dass durch Kanten benachbarte Knoten verschiedene Farben erhalten?

genügt sogar: Vier!

Korollar (Sechsfarbensatz). Sei $X=(V,E)$ ein endl. zshgdr planarer Graph.

1. Ist $|V| \geq 3$, so gilt
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$
2. Insbesondere ex. ein Knoten in X vom Grad höchstens 5.
3. Also ist der Graph X mit sechs Farben färbbar, d.h. es gibt eine Abb. $c : V \longrightarrow \underbrace{\{1, \dots, 6\}}_{\text{Farben}}$ mit
$$\forall_{\{v,w\} \in E} \quad c(v) \neq c(w).$$

Beweis. 1. Sei $f : X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung von X. Sei F die Anzahl der Facetten von f.

$|V| = 3$: eh klar, da $|E| \leq 3$

Sei $|V| \geq 3$. OBdA sei $|V| \geq 4$.

Dann gilt

jede Kante „berandet" ≤ 2 Facetten

$$\frac{2\cdot|E|}{3} \geq F = 2-|V|+|E|$$

eulerscher Polyedersatz.

jede Facette wird von ≥ 3 Kanten berandet (da $|V|\geq 4$)

Jetzt: nach $|E|$ auflösen.

2. Ang. alle Knoten hätten Grad ≥ 6.

Dann:

$$6\cdot|V| \leq \sum_{v\in V} \deg v = 2\cdot|E|$$

und somit $|E| \geq 3\cdot|V|$ ↯ 1.

3. Folgt per Induktion aus 2. $\square$