04.06.2020

Org: Wenn die Klausur in Präsenz stattfinden kann, findet sie in Präsenz statt.

Wdh: Geometrie in Hilberträumen, insbes:
- Orthogonalität
- analyt. Kennzeichen von diff'baren Kurven

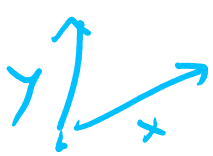
3.3 WINKEL

Ziele:
- Winkel def
- Winkelsumme in euklid. Dreiecken
- Flächeninhalte von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$

3.3.1 WINKEL

Idee: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ —analyt.→ Winkel
- stimmt mit der Anschauung überein
- analyt. Def für viele Beweise bequemer

Definition. (Winkel) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklid. VR mit induzierter Norm $\|\cdot\|$. Seien $x, y \in V$ mit $\|x\| \neq 0$, $\|y\| \neq 0$. Dann ist der **Winkel zwischen x und y** def. als

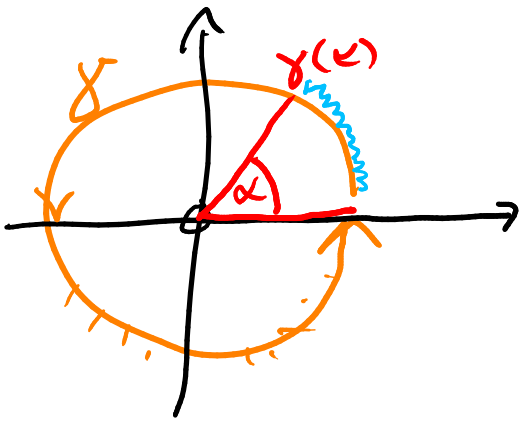


$$\sphericalangle(x,y) := \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \in [0,\pi]$$

$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$ (bijektiv)

$\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \in [-1,1]$ Cauchy-Schwarz

Bemerkung. Dies stimmt mit der Anschauung überein:



Sei $\alpha \in [0,\pi]$ und sei

$$\gamma : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

(dies eine Parametrisierung des oberen Halbkreises!)

Beh: ① $\sphericalangle\big((1,0), \gamma(\alpha)\big) = \alpha$

② $L(\gamma|_{[0,\alpha]}) = \alpha$.

in $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{Std Skp}}\right)$

Beweis.

① Nach Def.

$$\sphericalangle\big((1,0), \gamma(\alpha)\big) = \arccos \frac{\langle (1,0), \gamma(\alpha)\rangle}{\|(1,0)\|_2 \cdot \|\gamma(\alpha)\|_2}$$

($(1,0) \neq 0$, $\gamma(\alpha) \neq 0$)

$$= \arccos\left(\frac{\cos\alpha + 0}{1 \cdot 1}\right)$$

$$= \arccos(\cos\alpha)$$

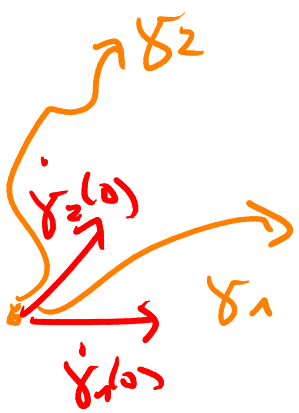
da $\alpha \in [0,\pi]$ $\quad = \alpha$.

analyt. Berechn. der Länge

② Es gilt

$$L(\gamma|_{[0,\alpha]}) = \int_0^\alpha \underbrace{\|\dot\gamma(t)\|_2}_{=1}\, dt = \alpha. \qquad \square$$

Definition. (Winkel zw. Kurven). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Seien $\gamma_1 : [0, L_1] \to V$, $\gamma_2 : [0, L_2] \to V$ differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0$, $\dot\gamma_2(0) \neq 0$. Dann def. wir



$$\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) := \measuredangle(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)).$$

Anschluss: Winkel in mehr. Räumen.

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, seien $\gamma_1 : [0, L_1] \to V$, $\gamma_2 : [0, L_2] \to V$ diffbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0$ und $\dot\gamma_2(0)$. Dann gilt

$$\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) = \measuredangle(\underbrace{\dot\gamma_1(0)}_{=:v_1}, \underbrace{\dot\gamma_1(0)}_{=:v_2}) = \arccos \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

$$= \arccos \frac{d(v_1,0)^2 + d(v_2,0)^2 - d(v_1,v_2)^2}{2 \cdot d(v_1,0) \cdot d(v_2,0)}$$

$$(\dots) = \lim_{(t_1,t_2) \to 0} \arccos \frac{t_1^2 + t_2^2 - d(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2))^2}{2 \cdot t_1 \cdot t_2}$$

kann in jedem metr. Raum formuliert werden!

3.3.2 Winkelsumme in euklidischen Dreiecken

Ziel: zeigen, dass die Winkelsumme in euklid. Dreiecken π ist. „180°"

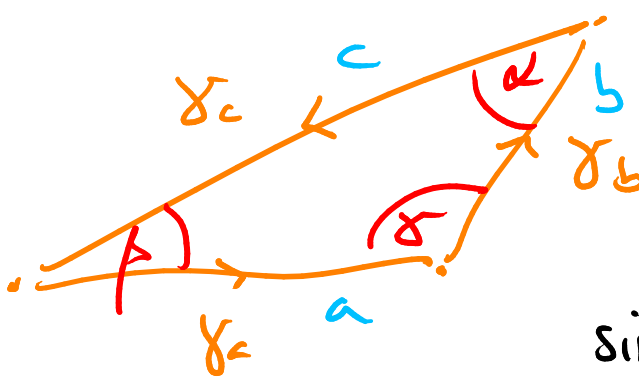
Satz (Winkelsumme in euklid. Dreiecken). Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum („z.B." $(\mathbb{R}^2, \text{Std-Skp})$) und sei $(\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c)$ ein geod. Dreieck in V (bzgl. der induzierten Metrik), dessen Ecken nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Seien (in der anderen Richtung durchlaufen)

$$\alpha := \sphericalangle(\gamma_c, \overline{\gamma_b}), \quad \beta := \sphericalangle(\gamma_a, \overline{\gamma_c}),$$

$$\gamma := \sphericalangle(\gamma_b, \overline{\gamma_c}).$$

Dann gilt: $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi}$.

Beweis. Wir zeigen: $\alpha + \beta = \pi - \gamma$.



Idee: genügt zu zeigen dass

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\gamma)$

und

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\pi-\gamma)$

gilt.

(da $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$)

Vereinfachung der Notation: Sei

$$a := \gamma_b(0) - \gamma_a(0), \quad b := \gamma_c(0) - \gamma_b(0),$$

$$c := \gamma_a(0) - \gamma_c(0) \quad \Rightarrow a+b+c = 0.$$

Dann gilt (nach der Char. von Geraden; Prop 2.2.6)

$$\alpha = \sphericalangle(c, -b), \quad \beta = \sphericalangle(a, -c), \quad \gamma = \sphericalangle(b, -a)$$

Nach Def. der Winkel gilt (alles durch a, b ausdrücken!)

$$\cos\alpha = \frac{\langle c, -b\rangle}{\|c\| \cdot \|{+b}\|} = \frac{\langle +a+b, +b\rangle}{\|c\| \cdot \|b\|}$$

$$= \frac{\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle}{\|c\| \cdot \|b\|},$$

$$\cos\beta \overset{\text{analog}}{=} \frac{\langle a, b\rangle + \langle a, a\rangle}{\|c\| \cdot \|a\|}$$

Außerdem ist (da $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $\alpha \in (0, \pi)$)

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{\langle a,a\rangle \cdot \langle b,b\rangle - \langle a,b\rangle^2}}{\|c\| \cdot \|b\|}$$

$$\sin\beta = \ldots = \frac{\sqrt{\langle a,a\rangle \cdot \langle b,b\rangle - \langle a,b\rangle^2}}{\|a\| \cdot \|c\|}.$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\|a\|}{\|b\|} \quad \text{(Sinussatz)}$$

Nach den Additionstheoremen für cos und sin folgt:

zz: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\gamma)$, $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\pi-\gamma)$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$= \frac{(\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle)\cdot(\langle a,b\rangle + \langle a,a\rangle)}{\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|^2} - \frac{\sqrt{(\langle a,a\rangle\cdot\langle b,b\rangle - \langle a,b\rangle^2)^2}}{\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|^2}$$

(≥ 0 CS)

$$= \langle a,a\rangle\cdot\langle b,b\rangle - \langle a,b\rangle^2$$

$$= \frac{\langle a,b\rangle\cdot\langle a,a\rangle + 2\cdot\langle a,b\rangle^2 + \langle b,b\rangle\cdot\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|^2}$$

$$= \frac{\langle a,b\rangle\cdot\langle a+b,\ a+b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|^2}$$

($\langle a+b, a+b\rangle = -c$, $= -c$)

$$= -\cos\gamma$$

$$= \cos(\pi-\gamma)$$

$\alpha+\beta = \pi-\gamma$

Additionsthm

und analog

Additionsthm

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

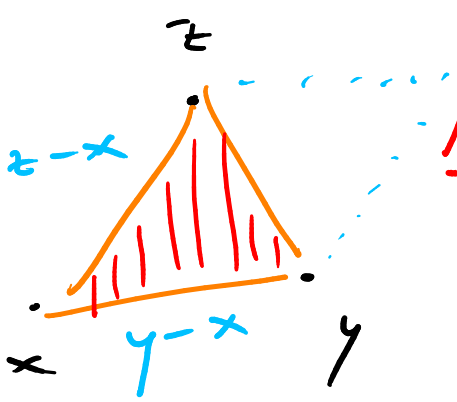
$$= \dots \text{ analog } \dots = \sin(\pi-\gamma).$$

□

3.3.3 FLÄCHENINHALTE (VON POLYGONEN)

Idee: zunächst Flächeninhalte von ebenen Dreiecken, dann Polygone

Flächeninhalt von Dreiecken: Seien $x,y,z \in \mathbb{R}^2$ drei verschiedene Pkte.



Sei

$$\Delta(x,y,z) := \{ t_x \cdot x + t_y \cdot y + t_z \cdot z \mid t_x, t_y, t_z \in [0,1], t_x + t_y + t_z = 1 \} \subset \mathbb{R}^2$$

die Menge der Pkte, die innerhalb des von x,y,z in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ aufgespannten geradlinigen Dreiecks liegen.

$\rightsquigarrow$ Flächeninhalt ist $\mu(\Delta(x,y,z))$ (μ: Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$ (oder iteriertes Riemann-Integral))

Dann gilt (s. Analysis 3) (?!)

$$\mu(\Delta(x,y,z)) = \frac{1}{2} \cdot \|y-x\| \cdot \|z-x\| \cdot \sin \sphericalangle(y-x, z-x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |\det(y-x, z-x)|.$$