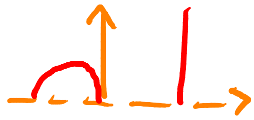
06.07.2021

Wdh.: • Geodäten in (H, d_H)



• Isometrien von (H, d_H): Möbiustrafos „+“ Spiegelung an $i \cdot \mathbb{R}_{>0}$

• Halbebenenmodell ist winkeltreu

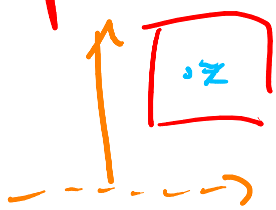
$\boxed{4.5.1}$ FLÄCHEN, WINKEL UND DER SATZ VON GAUß-BONNET

Idee: Zshg zw. Winkelsumme und Flächeninhalt von hyp. geod. Dreiecken

Definition (hyperbolischer Flächeninhalt). Sei $f : H \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar. Dann def. wir

$\subset \mathbb{R}^2$

auf T_zH: $\langle \cdot , \cdot \rangle_{H,z}$



Symbol

$$\int_H f \, d\mathrm{vol}_H := \int_H f(x,y) \sqrt{\det G_{H,(x,y)}} \, d(x,y)$$

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ni G_{H,(x,y)} := \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle_{H,(x,y)} & \langle e_1, e_2 \rangle_{H,(x,y)} \\ \langle e_2, e_1 \rangle_{H,(x,y)} & \langle e_2, e_2 \rangle_{H,(x,y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \int_H f(x,y) \cdot \frac{1}{y^2} \, d(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} \cdot f(x,y) \, dx \, dy$$

Ist $A \subset \mathbb{H}$ messbar, so def wir

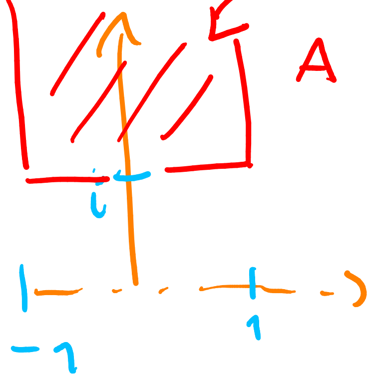
$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) := \int_{\mathbb{H}} \overset{\mathbb{1}_A}{\chi_A} \, d\mathrm{vol}_{\mathbb{H}} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

$$\mathbb{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$z \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in A \\ 0 & \text{falls } z \notin A \end{cases}$$

Bsp:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\left([-1,1] \times [1, \infty)\right) = \int_{0+0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} \cdot \chi_A(x,y) \, dx \, dy$$



$$= \int_{1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{1}{y^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{y^2} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} 1 \, dx}_{\overset{\mathrm{HDI}}{=} 2} \, dy$$

$$= 2 \cdot \int_{1}^{\infty} \frac{1}{y^2} \, dy \overset{\mathrm{HDI}}{=} 2 \cdot (-0 - (-1))$$

$$= 2.$$

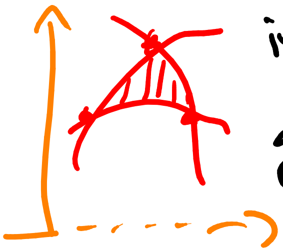
euklid. Flächeninhalt von A ist: ∞.

Proposition. (Isometrien sind flächentreu). Sei $A \subset H$ messbar und sei $f \in \mathrm{Isom}(H, d_H)$. Dann ist $f(A)$ messbar und

$$\mu_{H^2}(f(A)) = \mu_{H^2}(A).$$

Beweis. Trafo ... und Verständnis von $\mathrm{Isom}(H, d_H)$. Ü 13.4. $\square$

<u>**Satz.**</u> (Satz von Gauß-Bonnet für die hyp. Ebene). Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H), dessen Bild nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten ist.



Seien α, β, γ die durch Δ def. Winkel. Dann gilt

$$\mu_{H^2}(\Delta) = \pi - \Big(\overbrace{\alpha + \beta + \gamma}^{\text{Winkelsumme}}\Big).$$

Insbes.: Winkelsumme $< \pi$!

· $\mu_{H^2}(\Delta) < \pi$

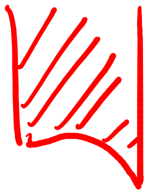
Def? · Char. der Geodäten zeigt: Δ ist ein Polygon in (H, d_H) (Seiten schneiden sich nur in den Ecken)

Jordanscher Kurvensatz

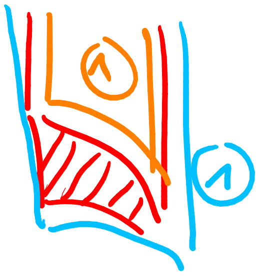
· H ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ $\rightsquigarrow$ Δ° ist def. $\rightsquigarrow$ $\mu_{H^2}(\Delta) := \mu_{H^2}(\mathring{\Delta})$

Beweis. Idee:

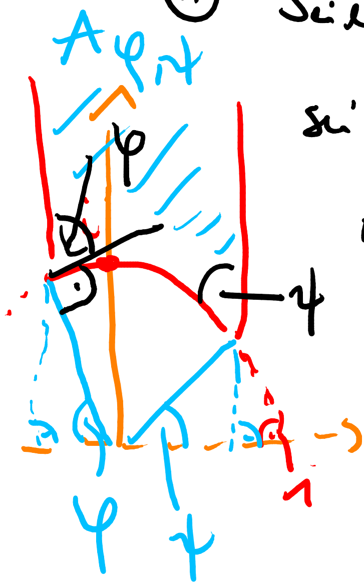
eine Ecke „im Unendlichen"



(1)



(2)



(1) Seien $\varphi,\psi \in [0,\pi]$ mit $\varphi+\psi < \pi$ und sei

$$A_{\varphi,\psi} := \{(x,y) \in \overset{\mathbb{R}^2}{\overset{\cup}{H}} \mid x \in [\cos(\pi-\varphi), \cos\psi],\ y \geq \sqrt{1-x^2}\},$$

Dann: $A_{\varphi,\psi}$ ist abgeschlossen, und damit messbar.

Beh: $\mu_{H^2}(A_{\varphi,\psi}) = \pi - (\varphi+\psi)$.

Beweis. Es gilt:

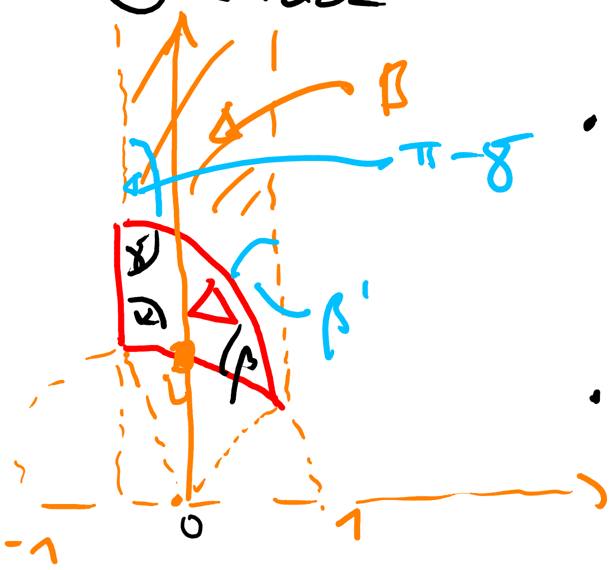
$$\boxed{\mu_{H^2}(A_{\varphi,\psi})} = \int_H \chi_{A_{\varphi,\psi}} \, d\mathrm{vol}_H = \int_{\cos(\pi-\varphi)}^{\cos\psi} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} \, dy \, dx$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} \int_{\cos(\pi-\varphi)}^{\cos\psi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_{\pi-\varphi}^{\psi} -1 \, dt$$

Substitution „$x = \cos t$"

$$= \boxed{\pi - (\varphi+\psi).}$$

② Zurück zu Δ: Ohne Einschränkung ⊛ sei:



- die Seite gegenüber von β liegt auf einer vertikalen Geraden
- Δ liegt oberhalb der Seite, die gegenüber von γ liegt
- die Seite gegenüber von γ liegt auf dem Halbkreis um 0 von Radius 1.

⊛
- Transitivität II der Möbiustrafos
- Möbiustrafos + „Spiegelung"
- horizontale Translation + Skalierung

$\in \operatorname{Isom}(H, d_H)$

und: Isometrien sind flächen- und winkeltreu.

Dann ist $\mathring{A} \cup \operatorname{im} \Delta \subset A_{\alpha, \beta+\beta'}$; genauer:

$$\mathring{A} \cup \operatorname{im} \Delta \cup B = A_{\alpha, \beta+\beta'}.$$

isometrisch zu $A_{\pi-\gamma, \beta'}$ (Skalierung) und $\Delta \cap B = \emptyset$.

Also: $\pi - (\kappa + \beta + \beta') \overset{①}{=} \mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\kappa, \beta+\beta'}) = \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) + \mu_{\mathbb{H}^2}(B)$

Isometrien sind flächentreu

$$= \boxed{\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta)} + \underbrace{\mu_{\mathbb{H}^2}(A_{\pi-\gamma, \beta'})}_{\overset{①}{=} \pi - (\pi - \gamma + \beta')}$$

und damit:

$$\boxed{\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta)} = \pi - (\alpha + \beta + \cancel{\beta'} + \gamma - \cancel{\pi} - \cancel{\beta'}) - \cancel{\pi}$$

$$= \boxed{\pi - (\alpha + \beta + \gamma).} \qquad \square$$

Warnung: Die Winkelsumme in hyp. Dreiecken ist nicht invariant!

Korollar (hyp. und euklid. Ebene sind nicht lokal isometrisch). Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset \mathbb{H}$ nicht-leere offene Teilmengen. Dann gibt es keine Isometrie $(U, d_2) \longrightarrow (V, d_{\mathbb{H}})$.

Beweis. Idee: Winkelsumme in „kleinen" Dreiecken.

Angenommen, es gäbe eine Isometrie $f\colon (U, d_2) \longrightarrow (V, d_H)$.

Dann folgt:

- f bildet geodätische nicht plattgedrückte Dreiecke auf geodätische nicht plattgedrückte Dreiecke ab
- f ist winkeltreu (da ~~der~~ euklid. Winkel und hyp. Winkel kompatible metr. Beschreibungen besitzen: Ausblick 3.3.5, Prop. 4.4.25).

$\leadsto$ f erhält die Winkelsumme in geod. Dreiecken.

Da $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und nicht-leer ist, enthält U ein nicht-plattgedrücktes geod. Dreieck Δ bzgl. d_2.

Dann gilt:

$$\pi = \underset{\text{in } (\mathbb{R}^2, d_2)}{\text{Winkelsumme von } \Delta} = \underset{\text{in } (H, d_H)}{\text{Winkelsumme von „}f(\Delta)\text{"}} \overset{\text{Gauß-Bonnet}}{<} \pi \quad \text{↯} \qquad \square$$