07.05.2021

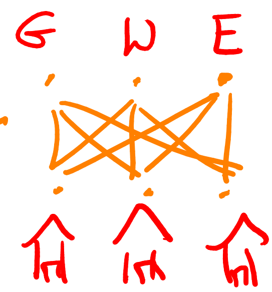
Wdh.: eulerscher Polyedersatz:

Ist $X=(V,E)$ ein endl. zshgder planarer Graph mit $V \neq \emptyset$, so gilt für jede planare Einbettung f von X:

$$|V| - |E| + \underbrace{F}_{\#\text{Facetten von } f} = 2.$$

• Abschätzung aus dem Sechsfarbensatz:
Ist (V,E) ein endl. zshgder planarer Graph mit $|V| \geq 3$, so gilt

$$(*) \quad |E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$



Anwendung:

Korollar. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind **nicht** planar.

Beweis. K_5: Angenommen, K_5 wäre planar. Mit $(*)$ folgt dann

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9 \quad ↯$$

Also ist K_5 **nicht** planar.

$K_{3,3}$: Angenommen, $K_{3,3}$ wäre planar. Analog zum Beweis von $(*)$ folgt:

Sei F die Anzahl der Facetten einer planaren Einbettung von $K_{3,3} = (V, E)$.
Dann gilt

$$\frac{9}{2} = \frac{2 \cdot 9}{4} = \frac{2 \cdot |E|}{\cancel{3}\,4} \geq F = 2 - |V| + |E| = 2 - 6 + 9 = 5$$

jeder echte Kreis in $K_{3,3}$ hat Länge ≥ 4 und $K_{3,3}$ enthält keine Knoten vom Grad 1

Also ist $K_{3,3}$ nicht planar. ↯ □

2 METRISCHE GEOMETRIE

Frage: Was ist Geometrie in Räumen mit einem Abstandsbegriff?

z.B.: · Was ist ein sinnvoller Begriff von „Geraden", „Dreiecken", „Kreise", „Symmetrie"?

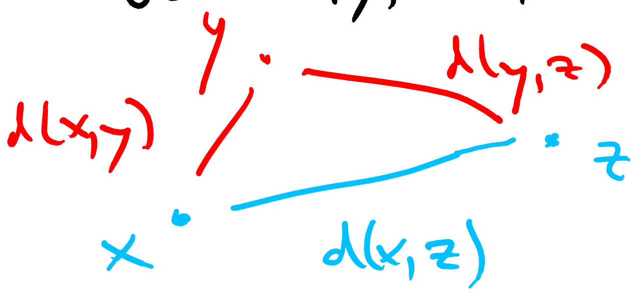
· Was kann man messen?

· Was ist Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal?

2.1 METRISCHE RÄUME

Definition. (metrischer Raum). Ein <u>metrischer Raum</u> ist ein Paar (M, d), bestehend aus einer Menge M und einer Abb. $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Definitheit: $\forall_{x,y \in M} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$.
- Symmetrie. $\forall_{x,y \in M} \quad d(x,y) = d(y,x)$.
- Dreiecksungl.: $\forall_{x,y,z \in M} \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.



Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(s. LA)

- $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist ein metrischer Raum, wobei

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

„Pythagoras"

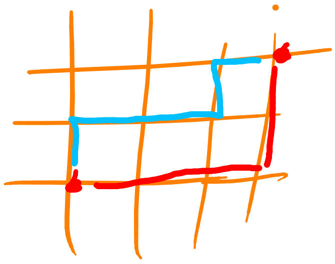
$$(x,y) \longmapsto \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

$\cancel{\sqrt{\langle x, y \rangle}}$

$\sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$

(sog. euklidischer Raum $\mathbb{R}^n$)

• $(\mathbb{R}^n, d_1)$ ist ein metrischer Raum wobei



$$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x,y) \longmapsto \sqrt[1]{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^1} = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

(Taxi-Metrik auf $\mathbb{R}^n$)

• $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist ein metrischer Raum, wobei

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x,y) \longmapsto \max\{\, |x_j - y_j| \mid j \in \{1, \dots, n\} \,\}$$

(Maximums-Metrik auf $\mathbb{R}^n$)

Beispiel: $x := (0,0)$, $y := (1,1)$

$\rightsquigarrow$ $d_2(x,y) = \sqrt{2}$

$d_1(x,y) = 2$

$d_\infty(x,y) = 1$.

Beispiel. (Graphen als metrische Räume). Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann ist (V, d) ein metrischer Raum wobei

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(v,w) \longmapsto \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \text{es ex. ein Weg der Länge } n \text{ in } X \text{ von } v \text{ nach } w \,\}$$

$d(v,w) = 2$

$d(v,u) = 3$

Beispiel. („Zauberwürfel", Rubik's Cube).

(*) Wie „schlimm" kann die Situation werden?

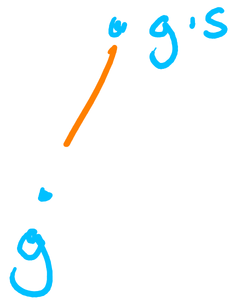
Modellierung durch einen Graphen: X

- Knoten: Menge aller Zustände des Würfels (die von der Grundpos. aus erreichbar sind)
- Kanten: Zwischen zwei Knoten ist genau dann eine Kante, wenn sich die entsprechenden Zustände um eine Vierteldrehung einer Seitenfläche unterscheiden.

(*) kann man übersetzen zu: Was ist in X der max. Abstand zur Grundposition? (Antwort: 26)

Beispiel. (Cayleygraphen). Sei G eine Gruppe und sei $S \subset G$ ein Erzeugendensystem. Der Cayleygraph von G bzgl S ist def. durch:

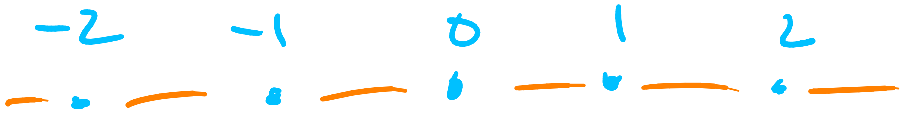
- Knotenmenge: G
- Kantenmenge: $\{\{g, g\cdot s\} \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}$



$\leadsto$ Metrik auf G (sog. Wortmetrik von G bzgl S).

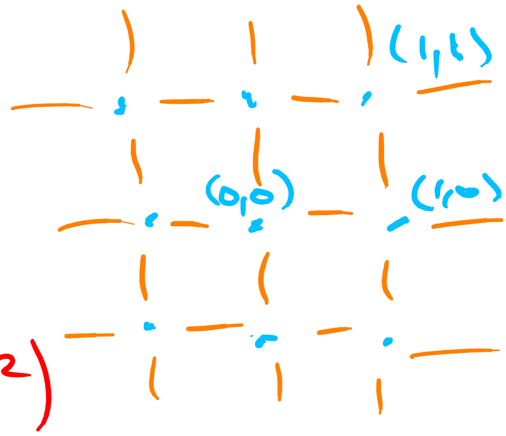
Beispiel:

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$:



„Zahlenstrahl"

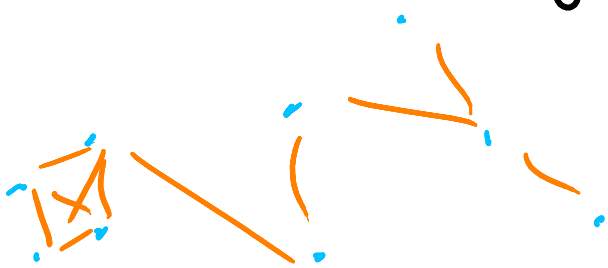
$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{(1,0),(0,1)\})$:



($\rightsquigarrow$ Metrik d_1 auf $\mathbb{Z}^2$)

Beispiel. (Kontaktgraphen). Sei M eine Menge von Personen.

$\rightsquigarrow$ Kontaktgraph:



- Knotenmenge: M
- Kanten: zwischen zwei Personen gibt es genau dann eine Kante, wenn diese beiden in den letzten 14 Tagen einen Risikokontakt gebildet haben.

$\rightsquigarrow$ kleiner Abstand zw. x und y: erhöhte Gefahr, dass sich eine Infektion von x zu y ausbreitet

Definition (isometr. Einb., Isometrie, Isometriegruppe).

Seien (X,d), (X',d') metr. Räume und sei $f\colon X \to X'$ eine Abb.

- Die Abb. f ist eine <u>isometr. Einbettung</u>, wenn
$$\forall_{x,y\in X} \quad d'(f(x),f(y)) = d(x,y).$$
- Die Abb. f ist eine <u>Isometrie</u>, wenn es eine ~~isometr. Einb.~~ Abb. $f'\colon X' \to X$ gibt mit
$$f\circ f' = \mathrm{id}_{X'} \quad \text{und} \quad f'\circ f = \mathrm{id}_X.$$
- Die Menge aller Isometrien $(X,d)\to(X,d)$ bildet eine Gruppe bzgl. Komposition, die sog. <u>Isometriegruppe</u> $\mathrm{Isom}(X,d)$ von (X,d).