08.06.2021

- Eval: 11.06. / GRIPS
- Vorlesung: bleibt online im SS 21

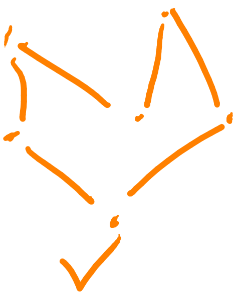
Wdh: Flächeninhalte von Dreiecken in $(\mathbb{R}^2, d_2)$

Jetzt: Polygone

viel(e) Ecke(n)

nur endl. viele Stücke

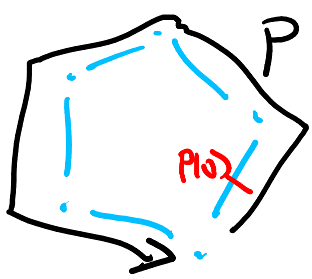
Definition (Polygon). Ein Polygon in einem metrischen Raum (X,d) ist ein stückweise isometrische Abb $P : [0,L] \to X$, wobei $L > 0$, mit:



- $P(0) = P(L)$ und
- $P|_{[0,L)}$ ist injektiv.

- Ist $t \in [0,L]$ ein Randpkt eines maximalen Intervalls, auf dem P isometrisch ist, so ist $P(t)$ eine Ecke von P.

zyklisch gedacht mit „ONL“



- Analog: Kanten von P.

Definition (Flächeninhalt). Sei $P : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ ein Polygon in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

$\operatorname{im} P := P([0,L])$ $\rightsquigarrow$ stetige inj. Abb. $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

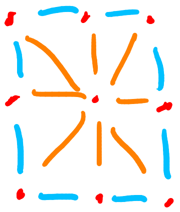
Nach dem Jordanschen Kurvensatz besteht $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{im} P$ aus genau zwei Wegzshgskomponenten, einer $\underbrace{\text{beschränkten}}_{=: P^\circ}$ und einer unbeschränkten.

Der Flächeninhalt von P ist def. als

$$\mu(P) := \mu(P^\circ) \; \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Satz (Satz von Pick). Sei P ein Polygon in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, dessen Ecken alle in $\mathbb{Z}^2$ liegen. Dann ist

„Geobrett"



$$\mu(P) = n^\circ + \frac{1}{2} \cdot n - 1,$$

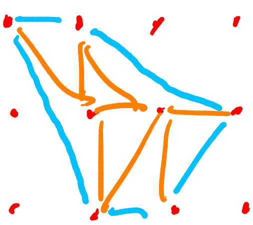
$n^\circ = 1$
$n = 8$
$\Downarrow$
$1 + \frac{1}{2} 8 - 1$
$= 4$

wobei

- $n^\circ := |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$
- $n := |\operatorname{im} P \cap \mathbb{Z}^2|$.

in Dreiecke zerlegen

Beweis. • Wir triangulieren $P^\circ \cup \operatorname{im} P$ in Dreiecke, deren Ecken in $\mathbb{Z}^2$ liegen und deren Inneres keine Pkte aus $\mathbb{Z}^2$ enthält. (z.B. induktiv)



- Bestimmung des Flächeninhalts solcher Dreiecke $\rightsquigarrow \frac{1}{2}$ Ü 8.3
- Zählen!

$$\mu(P) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \text{Anzahl der kleinen Dreiecke}}_{=: D}$$

Idee: Die gewählte Triangulierung def. einen Graphen $X = (V, E)$, wobei:

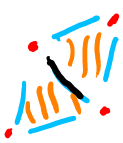
- Knoten: Eckpunkte der kleinen Dreiecke
- Kanten: geg. durch die Kanten der kleinen Dreiecke.

Triangulierung $\rightsquigarrow$ planare Einbettung von X. mit $D+1$ Facetten

$\rightsquigarrow$ eulersche Polyederformel anwendbar:

$$|V| - |E| + \#\text{Facetten} = 2$$

Sei • e die Anzahl der Kanten der Triag., die in im P liegen



• e° die Anzahl der Kanten der Triang., die in P° liegen.

Dann: $$3 \cdot D = e + 2 \cdot e^\circ. \quad (*)$$

Also folgt:

Eulersche Polyederformel

$$D = \#\,\text{Facetten} - 1 = 2 - |V| + |E| - 1$$

$$= 1 - |V| + |E|$$

$$= 1 - (n^\circ + n) + e^\circ + e$$

„# Ecken = # Kanten" in P

$$(*) \quad = 1 - (n^\circ + n) + \tfrac{3}{2} D - \tfrac{1}{2} e + e$$

$$= 1 - n^\circ - n + \tfrac{3}{2} D + \tfrac{1}{2} e \qquad e = n$$

$$= \boxed{1 - n^\circ - \tfrac{1}{2} n + \tfrac{3}{2} D}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot D}_{= \mu(P)} = \tfrac{1}{2} n + n^\circ - 1. \qquad \square$$

3.4 SYMMETRIE

Ziel: Bestimmung von $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, d_2)$

$\rightsquigarrow$ besseres Verständnis von Kongruenz, von Regularität

3.4.1 WINKELTREUE

zeigen, dass Elte von $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, d_2)$ winkeltreu sind ($\rightsquigarrow$ Starrheit).

Proposition (Starrheit des Skalarprodukts). Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(V', \langle\cdot,\cdot\rangle')$ euklid. VR, sei $f : V \longrightarrow V'$ eine ~~Isometrie~~ isometr. Einb. bzgl. der von den Skalarprodukten induzierten Metriken d und d' mit $f(0) = 0$.

sonst: Translation anwenden

Dann gilt:

$$\forall_{x,y \in V} \quad \langle f(x), f(y)\rangle' = \langle x, y\rangle.$$

$\leadsto$ f ist winkeltreu

Beweis. Seien $x, y \in V$. Dann gilt

$$\boxed{\langle f(x), f(y)\rangle'} = \frac{1}{2}\cdot\Big(\underbrace{\|f(x)\|^2}_{=d'(0,f(x))^2 = d(0,x)^2} + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{=d'\ldots = d\ldots} - \underbrace{\|f(x)-f(y)\|^2}_{=d'(f(x),f(y))^2 = d\ldots}\Big)$$

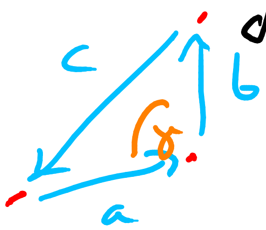
Polarisierung

f Isometrie und $f(0)=0$

$$= \frac{1}{2}\cdot\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

$$= \boxed{\langle x, y\rangle}. \qquad \square$$

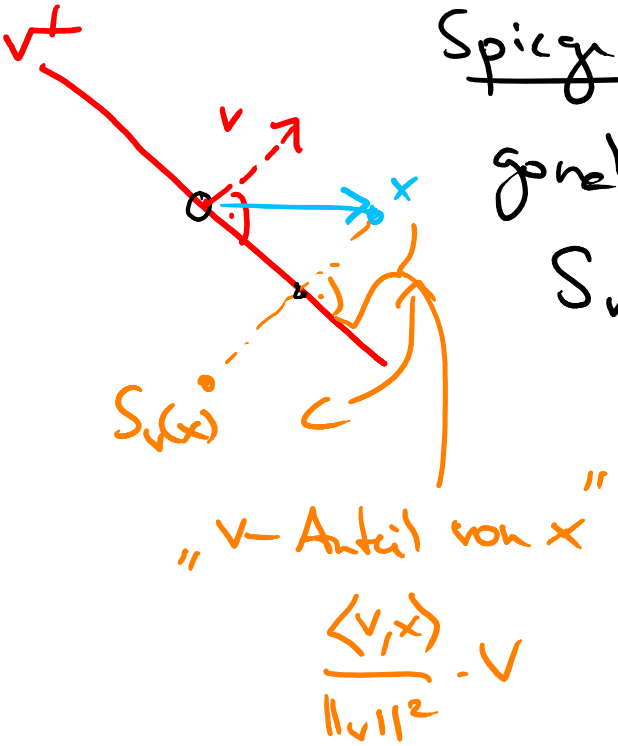
Bemerkung (Kosinussatz). Dieselbe Rechnung zeigt den Kosinussatz:



$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\cdot\cos\gamma\cdot\|a\|\cdot\|b\|.$$

„verallg. Pythagoras"

Definition. (Spiegelung). Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklid. VR, sei $v \in V\setminus\{0\}$. Dann def. wir die <u>Spiegelung</u> an der zu v orthogonalen Hyperebene $v^\perp$ durch



$$S_v : V \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto x - 2\cdot\frac{\langle v,x\rangle}{\|v\|^2}\cdot v .$$

Nachrechnen:
S_v ist eine Isometrie von V bzgl. der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Metrik.