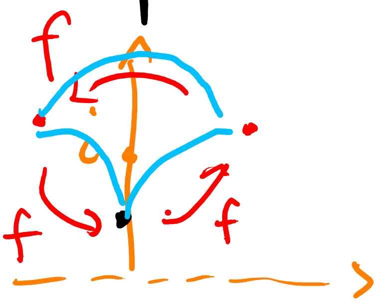
07.07.2021

Wdh: Satz von Gauß-Bonnet (für hyp. Dreiecke)

„Flächeninhalt eines hyp. Dreiecks $= \pi -$ Winkelsumme"

4.5.2 REGULÄRE HYPERBOLISCHE DREIECKE

Beispiel.



$\mathrm{Stab}_i = SO(2)$

Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die Möbiustrafo zu

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in SO(2) = \mathrm{Stab}_i .$$

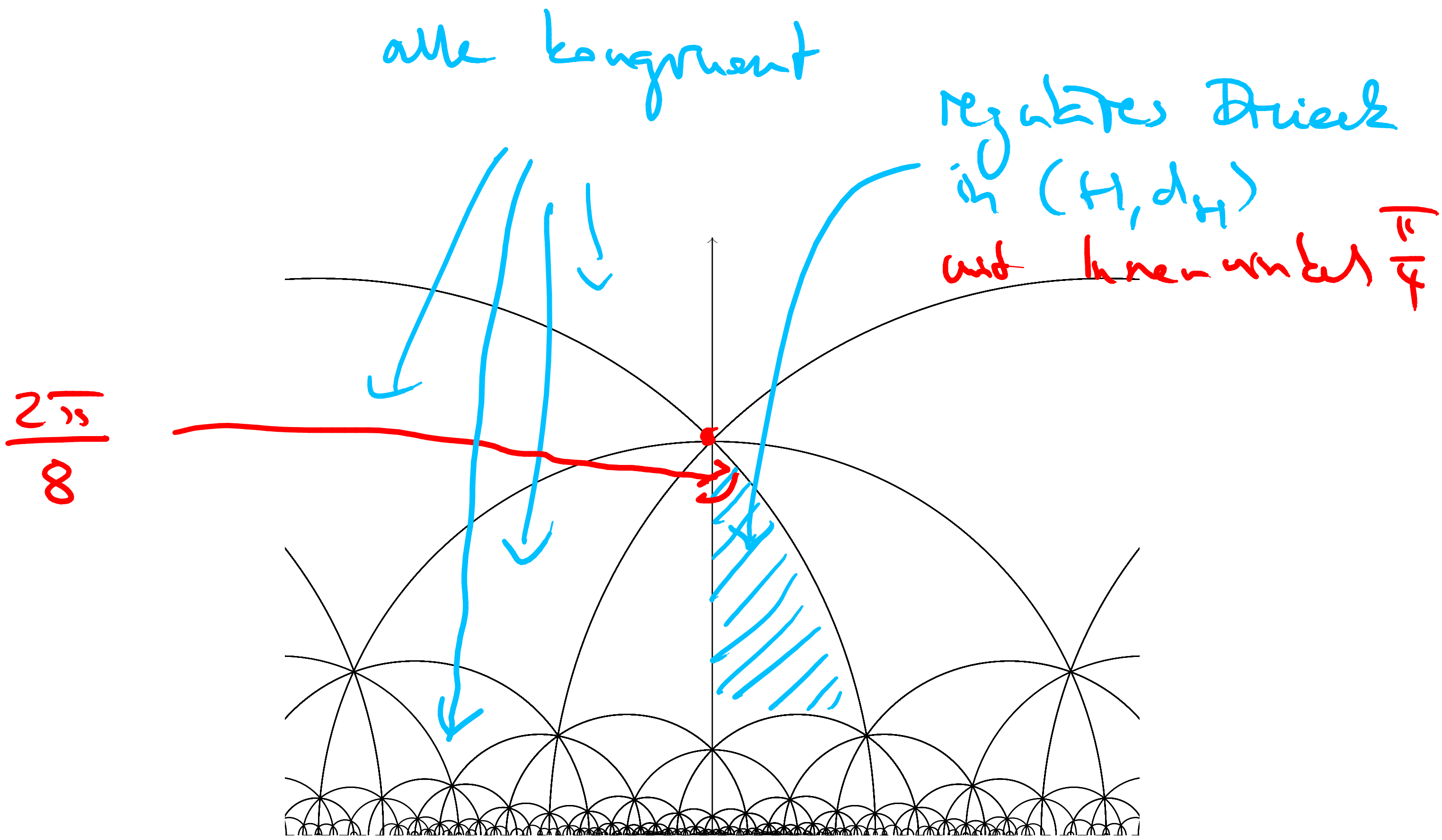
Zu $y \in (0,1)$ betrachten wir das geod. Dreieck $\Delta(y)$ in $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ mit den Ecken

$$i\cdot y,\ f(i\cdot y),\ f^2(i\cdot y).$$

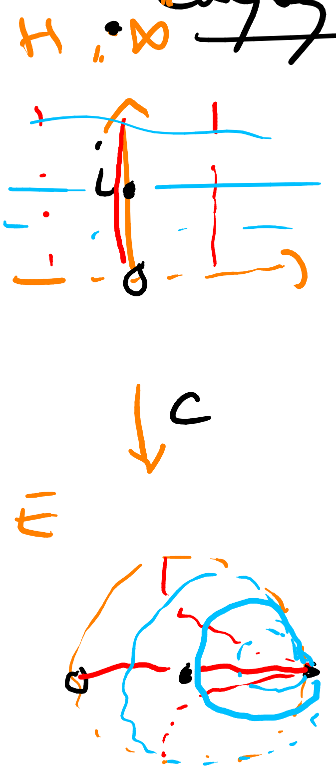
$f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ $\rightsquigarrow$ $\Delta(y)$ ist regulär und Innenwinkel von $\Delta(y) \xrightarrow{y \to 0} 0$.

Ü 12.4

Insbes: Es gibt mehr reguläre Pflasterungen von $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$!



Anblick: Poincaré-Scheibenmodell der hyp. Ebene.



Cayley-Transformation:

$$C: H \longrightarrow E := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$

$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

Poincaré-Scheibenmodell

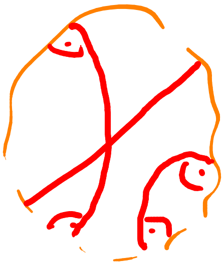
Damit:

$$g_H \text{ auf } H \overset{C}{\rightsquigarrow} g_E \text{ auf } E$$

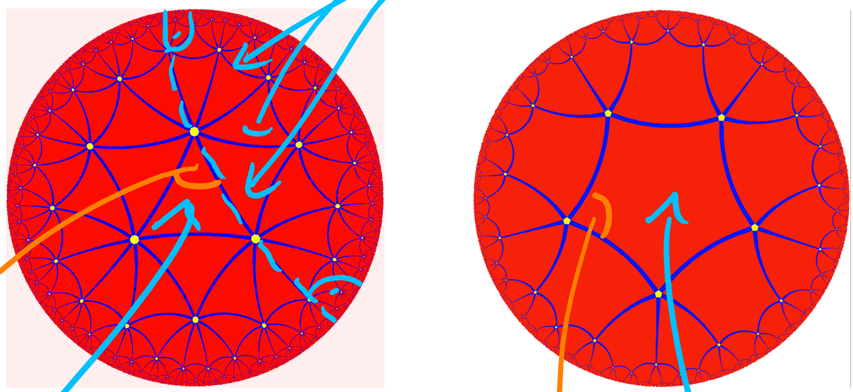
$\Leftarrow$ Wm. Isometrie, winkeltreu

$\rightsquigarrow$ PSM ist winkeltreu

Geodäten im PSM: Durchmesser und Kreisbögen, die den Rand orthogonal schneiden.



alle kongruent



reguläres Dreieck in (E, d_E)

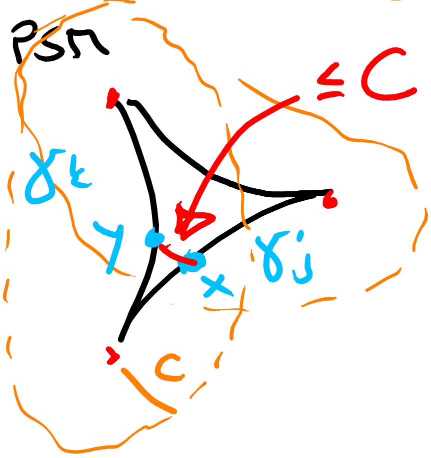
reguläres Fünfeck in (E, d_E)

Innenwinkel $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Innenwinkel $\frac{2\pi}{5}$

4.5.3 HYPERBOLISCHE DREIECKE SIND DÜNN

unabh. von dem Dreieck!

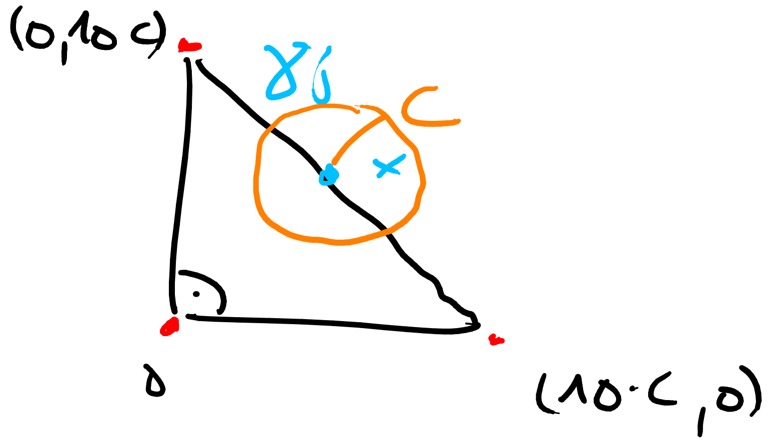


Satz (Dünnheit hyp. Dreiecke). Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit: Ist $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ ein geod. Dreieck in (H, d_H), so gilt:

Für jedes $j \in \{0,1,2\}$ und jedes $x \in \operatorname{im} \gamma_j$ ex. ein $k \in \{0,1,2\} \setminus \{j\}$ und ein $y \in \operatorname{im} \gamma_k$ mit $d_H(x,y) \le C$.

Gilt das auch im euklidischen Fall?

NEIN!



<u>Idee:</u> Beweis des Satzes über den Flächeninhalt.

Proposition. (Flächenwachstum in der hyp. Ebene). Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

euklidisch: quadratisches Wachstum!

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\left(B_i^{(\mathbb{H},d_\mathbb{H})}(r)\right) \geq \frac{r}{2}\cdot\left(e^{r/2}-1\right)$$

(wind.) $\leadsto$ exponentielles Wachstum im Radius!

Beweis. (Ü) 13.2. □

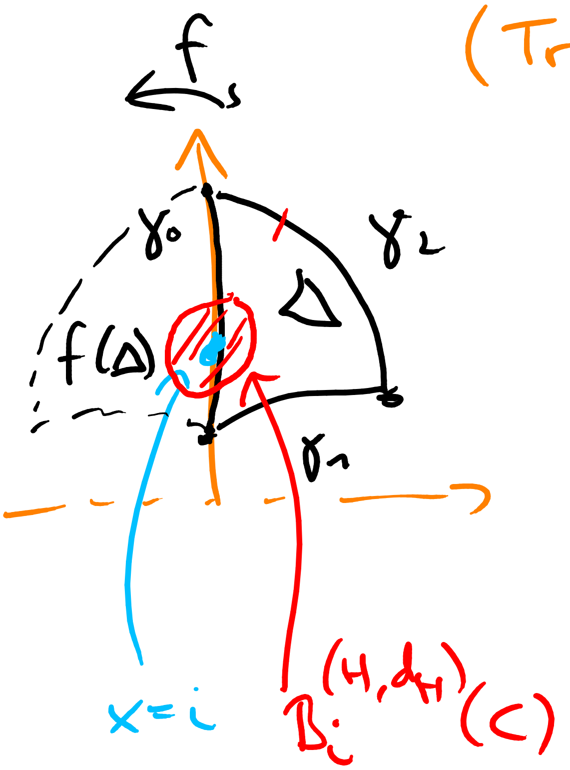
Beweis des Satzes. Nach der obigen Prop. ex. ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\left(B_i^{(\mathbb{H},d_\mathbb{H})}(c)\right) \geq 2\pi$$

Sei $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ ein geod. Dreieck in $(\mathbb{H}, d_\mathbb{H})$ und sei $x \in \operatorname{im} \gamma_0$. oBdA

Ohne Einschränkung sei Δ nicht in einer ganzen Geodäten enthalten. (sonst eh klar)

Ohne Einschränkung liege im γ_0 auf der imaginären Achse und $x = i$. (Transitivität II der Möbiustrafos).



Angenommen es gäbe <u>kein</u> $y \in \operatorname{im}\gamma_1 \cup \operatorname{im}\gamma_2$ mit $d_H(x,y) \le C$.

Dann folgt:

$$\boxed{B_i^{(H,d_H)}(C)} \subset \Delta^\circ \cup \operatorname{im}\gamma_0 \cup (f(\Delta))^\circ,$$

wobei $f : H \to H$, $z \mapsto -\bar{z}$ die Spiegelung an der imaginären Achse ist. Also:

$$2\pi \le \mu_{H^2}\left(B_i^{(H,d_H)}(C)\right) \le \mu_{H^2}(\Delta) + \overbrace{\mu_{H^2}(\operatorname{im}\gamma_0)}^{=0} + \mu_{H^2}(\underbrace{f(\Delta)}_{\text{geod. Dreieck}})$$

Satz von Gauß-Bonnet für hyp. Dreiecke

$$< \pi + \pi = 2\pi$$

↯

Also ex. ein $y \in \operatorname{im} \gamma_1 \cup \operatorname{im} \gamma_2$ mit $d_H(x,y) \leq C$. $\square$

<u>Ausblick</u>: (Gromov-hyp. Räume)

<u>Idee</u>: „Dünnheit von geodätischen Dreiecken“ als Def. für negative Krümmung von metrischen Räumen zu verwenden

$\rightsquigarrow$ Gromov-hyp. Räume

Cayley-Graphen

$\rightsquigarrow$ Gromov-hyperbolische Gruppen

$\rightsquigarrow$ Revolution der Geometrie und der geometr. Gruppenth. ($\sim$ seit 1970)