11.05.2021

Wdh: • metr. Räume
• isometr. Einb. zw. metrischen Räumen
• Bsp: • $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, ...
• Graph als metr. Raum

2.2 GEODÄTEN

Frage: Was sind „Geraden" in metrischen Räumen?

Idee: metrisches Abbild von $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik.

Definition ((metrische) Geodäte). Sei (X,d) ein metr. Raum.

- Sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Eine Geodäte der Länge L in (X,d) ist eine isometr. Einbettung $[0,L] \to X$.

Standardmetrik — d

- Ein geodätischer Strahl ist eine isometr. Einbettung $[0,\infty) \to X$.
- Eine geodätische Gerade ist eine isometr. Einbettung $\mathbb{R} \to X$.

Proposition. (Geodäten und isometr. Einb.). Seien (X,d), (X',d') metrische Räume, sei $f:(X,d)\to(X',d')$ eine isometr. Einbettung, sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\gamma: I\to X$ eine Geodäte in (X,d). Dann ist $f\circ\gamma: I\to X'$ eine Geodäte in (X',d').

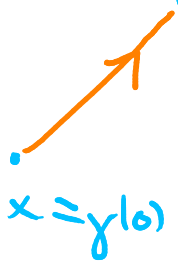
Beweis. Es gilt allgemein: Verknüpfungen von isometr. Einb. sind isometr. Einb. □

Beispiele: 1) Wichtiger Testfall: $(\mathbb{R}^n, d_2)$. (Vgl. mit affinen Geraden)

Proposition. (euklidische Geodäten). Sei $n\in\mathbb{N}$, seien $x,y\in\mathbb{R}^n$ mit $x\neq y$. Dann gibt es genau eine Geodäte in $(\mathbb{R}^n,d_2)$ von x nach y, nämlich

$$\gamma:[0,L]\longrightarrow\mathbb{R}^n,\qquad t\longmapsto x+\frac{t}{L}\cdot(y-x)$$

wobei $L:=d_2(x,y)$.



"$t\cdot y+(1-t)\cdot x$"

Beweis, zu zeigen:

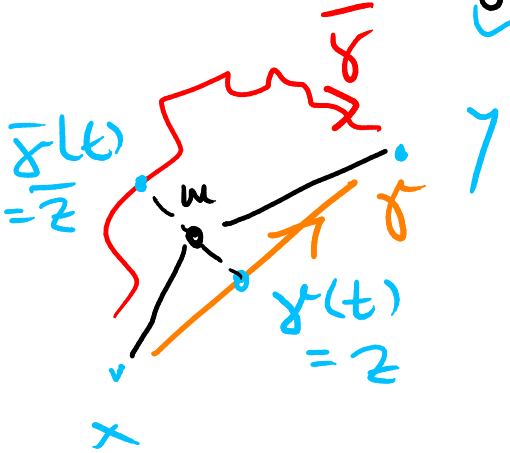
1. γ ist eine Geodäte von x nach y.
2. es gibt keine weitere.

Zu 1.: nachrechnen

Zu 2.: Angenommen, es gibt eine weitere Geodäte $\bar{\gamma}: [0, \bar{L}] \to \mathbb{R}^n$ von x nach y.

- Dann ist ($\bar{\gamma}$ Geodäte, γ Geodäte)
$$\bar{L} = d_2(x,y) = L.$$

- Wegen $\bar{\gamma} \neq \gamma$ ex. ein $t \in (0, L)$ mit $\bar{\gamma}(t) \neq \gamma(t)$.
($\bar{\gamma}(t) =: \bar{z}$, $\gamma(t) =: z$)



Sei $m := \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$.

Dann ist (γ Geodäte)

$$\boxed{d_2(x,z)} = d_2(\gamma(0), \gamma(t)) = t$$

$$\boxed{d_2(x,\bar{z})} = d_2(\bar{\gamma}(0), \bar{\gamma}(t)) = t$$

($\bar{\gamma}$ Geodäte)

und $z \neq \bar{z}$.

(*) Dann folgt (s.u.): $d_2(x,m) < d_2(x,z) = d_2(x,\bar{z})$.

und $d_2(y,w) < d_2(y,z) = d_2(y,\bar{z})$.

Also ist

$$L = d_2(x,y) \leq d_2(x,w) + d_2(w,y) \quad (\Delta\text{-Ungl.})$$

$$\overset{(*)}{<} d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

$$= d_2(\gamma(0),\gamma(t)) + d_2(\gamma(t),\gamma(L))$$

$$= t \qquad = L-t$$

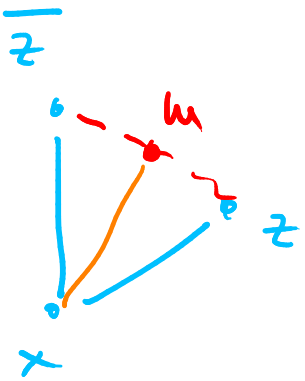
γ Geodäte $\longrightarrow$

$$= L$$

↯

Somit ist γ die einzige Geodäte in $(\mathbb{R}^n, d_2)$ von x nach y. □

Lemma (*) Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $x, z, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ mit $d_2(x,z) = d_2(x,\bar{z})$ und $z \neq \bar{z}$.



Dann gilt

$$d_2\left(x, \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot(z+\bar{z})}_{w}\right) < d_2(x,z) = d_2(x,\bar{z}).$$

Beweis. Der Übersichtlichkeit halber: o.B.d.A. sei $x = 0$.

(möglich, da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto v - x$ eine Isometrie bzgl. d_2 ist).

Dann gilt:

$$\underbrace{d_2(0,z)^2}_{=x} = d_2(0, u + (z-u))^2$$

Def von d_2 $\longrightarrow$

$$= d_2(0,u)^2 + d_2(0, z-u)^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot u_j \cdot (z_j - u_j)}$$

$u = \frac{1}{2}\cdot(z+\bar{z})$ $\longrightarrow$

$$= \sum_{j=1}^{n} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_j + \bar{z}_j) \cdot \frac{1}{2} \cdot (z_j - \bar{z}_j)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} (z_j^2 - \bar{z}_j^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} z_j^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot d_2(0,z)^2 - \frac{1}{2} \cdot d_2(0,\bar{z})^2$$

nach Vor: $\longrightarrow$ $d_2(x,z) = d_2(x,\bar{z})$

$$= 0$$

mit $x = 0$

$$= d_2(0,u)^2 + d_2(0, \underbrace{z-u}_{\neq 0,\ da\ z \neq \bar{z}})^2$$

$$> d_2(\underbrace{0}_{=x}, u)^2$$

$\neq 0$

> 0

Wegen $d_2(0,z) \geq 0$ und $d_2(0,w) \geq 0$ folgt mit der Monotonie von $\sqrt{\cdot}$, dass $d_2(0,z) > d_2(0,w)$. □

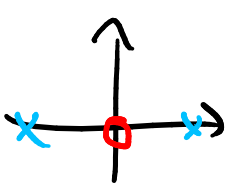
Bemerkung: Analog folgt: Ist $n \in \mathbb{N}$ und damit $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine d_2-Geodäte, so folgt

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \quad \gamma(t) = \gamma(0) + t \cdot (\gamma(1) - \gamma(0)).$$

⇝ Insbesondere: $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist ein sog. eindeutig geodätischer Raum.

Allgemeiner können in metr. Räumen verschiedene Situationen auftreten:

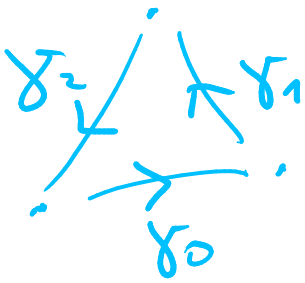
- In $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ex. nicht zwischen allen Punkten Geodäten! (ii)



- In $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ex. i.a. mehrere Geodäten zwischen je zwei Punkten:

NB i.a. bilden metrische Räume mit Geodäten als Geraden keine Mini-Geometrie!

Definition. (geodätisches Dreieck). Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ein <u>geodätisches Dreieck</u> in (X,d) ist ein Tripel



$$(\gamma_0 : [0, L_0] \to X,$$
$$\gamma_1 : [0, L_1] \to X,$$
$$\gamma_2 : [0, L_2] \to X)$$

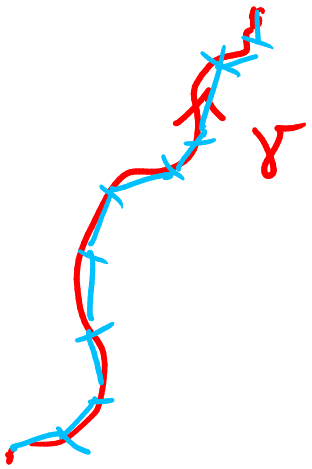
von Geodäten in (X,d) mit

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0),$$
$$\gamma_1(L_1) = \gamma_2(0),$$
$$\gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

z.B.: In $(\mathbb{R}^n, d_2)$ „sind" geodätische Dreiecke die anschaulichen Dreiecke.

2.3 Länge von Kurven

Idee: Metrik $\rightsquigarrow$ Länge von Kurven „messen" / def.



- „ersetzen" Kurven durch „viele" (endl. viele) Punkte
- „approx." die Länge dann durch die Summe der aufeinanderfolgenden Abstände.

Definition. (Länge einer Kurve). Sei (X,d) ein metr. Raum, seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 \leq T_1$, sei $\gamma: [T_0, T_1] \to X$ eine stetige Abb. Dann def. wir die <u>Länge von γ</u> in (X,d) als:

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ t_0, \dots, t_n \in [T_0, T_1] \text{ mit } t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \right\}$$

$$\in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Ist $L(\gamma) < \infty$, so heißt γ <u>rektifizierbar</u>.

Proposition. Sei (X,d) ein metr. Raum, sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sei $\gamma : [0,L] \to X$ stetig.

1. Dann ist $L(\gamma) \geq d(\gamma(0), \gamma(L))$.

2. Ist γ eine Geodäte, so ist
$$L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(L)).$$

Beweis. 1. Nach Def. gilt
$$L(\gamma) = \sup \ldots \geq d(\gamma(0), \gamma(L)).$$
↑ „$t_0 = 0, t_1 = L$"

2. Nach 1. noch zu zeigen: „$\leq$".

Sei $n \in \mathbb{N}$, $t_0, \ldots, t_n \in [0,L]$ mit $t_0 \leq \ldots \leq t_n$.

Dann gilt:

Teleskop

$$\sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) = t_n - t_0 \leq L$$
($t_n - t_0 \leq L$, $t_n - t_0 \geq 0$)

γ Geodäte → $= |t_j - t_{j+1}| = t_{j+1} - t_j$

$\rightsquigarrow L(\gamma) = \sup \ldots \leq L.$ □