11.06.2021

Ü 8.2: Tippfehler: $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^3$
fünf Vektoren
(Abgabe bis Di)

Klausur: wenn möglich, in Präsenz; vorher: Probeklausur

Wdh: Ziel: Bestimmung von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$
bereits gemacht: linear<u>t</u>ät, Winkeltreue

3.4.2 DIE EUKLIDISCHE ISOMETRIEGRUPPE

Satz (euklid. Isometriegruppe) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Abb.

$$\begin{aligned}
\underbrace{O(n)}_{=\{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}} &\longleftrightarrow \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2) \\
A &\longmapsto (x \longmapsto A \cdot x) \\
(\underbrace{f(e_1) | \dots | f(e_n)}_{\text{Spalten}}) &\longleftarrow\!\!| \; f
\end{aligned}$$

zueinander invers Gruppenhomomorphismen.

Beweis. „$\longrightarrow$" Sei $A \in O(n)$ und sei $f_A := (x \longmapsto A \cdot x)$.

- Es gilt $f_A \in \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$, denn:

  Es ist $f_A(0) = A \cdot 0 = 0$.

  Außerdem ist f_A eine d_2-Isometrie, denn: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{d_2(f_A(x), f_A(y))} = \| \underbrace{f_A(y)}_{A\cdot y} - \underbrace{f_A(x)}_{A\cdot x} \|_2 = \|A\cdot(y-x)\|_2$$

$\langle x,y\rangle_2 = x^T\cdot y$

$$= \sqrt{\langle A(y-x), A\cdot(y-x)\rangle_2}$$

$$= \sqrt{\langle \underbrace{A^T\cdot A}_{=E_n,\text{ da } A\in O(n)}\cdot(y-x), y-x\rangle_2}$$

$$= \sqrt{\langle y-x, y-x\rangle_2} = \|y-x\|_2$$

$$= \boxed{d_2(x,y).}$$

- $A \mapsto f_A$ ist ein Gruppenhom. (LA) ✓.

"$\Leftarrow$" Sei $f \in \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$. Dann ist f linear und winkeltreu (Satz 2.5.1, Prop 3.4.1).

Sei $A := (f(e_1) | \cdots | f(e_n)) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

- Es gilt $A \in O(n)$, denn: Es gilt

! $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n}$ $\boxed{\langle A^T\cdot A\cdot x, y\rangle_2} = \langle A\cdot x, A\cdot y\rangle_2$ f winkel-treu

f linear $= \langle f(x), f(y)\rangle_2 = \boxed{\langle x,y\rangle_2.}$

Daraus folgt $A^T\cdot A = E_n$ (s. LA).

· Das def. einen Gruppenhom ...

Die angg. Abb. sind invers zueinander. $\square$

(Bem.: Allgemeiner gilt: „Translationen"

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2) \cong \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$$

$\cong \mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$)

Satz. (niedrigdim. orthogonale Gruppen)

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gilt

Untergruppe von $O(n)$

$= \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$

$$O(n) = SO(n) \cup \{S \cdot A \mid A \in SO(n)\}$$

„orientierungserhaltend"

$$\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ Spiegelung

nicht „orientierungserhaltend"

$\rightsquigarrow$ müssen nur $SO(n)$ verstehen

2. Es gilt $SO(2) = \{R(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$

Rotationen um 0

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

2.' $O(2) \setminus SO(2)$ sind die Spiegelungen an Geraden durch 0.

3. Die Gruppe $SO(3)$ besteht aus den Drehungen in $\mathbb{R}^3$ um Geraden durch 0.
Genauer: Sei $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Dann gilt genau dann $A \in SO(3)$, wenn es $B \in O(3)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt mit

$$\underbrace{B^{-1} \cdot A \cdot B}_{\text{„Basiswechsel"}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$R(\varphi)$}} \\ 0 & & \end{array}\right).$$

Beweis. s. LA. □

Korollar (Erzeugung durch Spiegelungen).
Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ wird von Spiegelungen an (affinen) Hyperebenen erzeugt.

d.h.: jedes Elt von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist eine (endl.) Komposition von Spiegelungen.

Beweis. Ⓤ 9.1 / 9.2. □

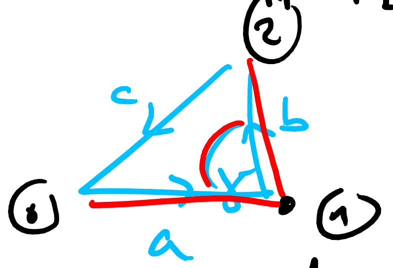
3.4.3 Kongruenz

Kongruenzsätze für euklid. Dreiecke spielen in elementargeom./axiomatischen Beweisen in der euklid. Geometrie eine wichtige Rolle.

<u>Satz</u>. (Kongruenzsätze für euklid. Dreiecke) Seien Δ, Δ' geodätische Dreiecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, deren Eckpkte jeweils nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Seitenvektoren von Δ bzw. Δ': a, b, c bzw a', b', c'
Gegenüberl. Winkel: α, β, γ bzw. α', β', γ'.
Dann gilt: Ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt, so sind im Δ und im Δ' kongruent.
Bildmenge der Seiten

SSS: $\|a\|_2 = \|a'\|_2$, $\|b\|_2 = \|b'\|_2$, $\|c\|_2 = \|c'\|_2$

SWS: $\|a\|_2 = \|a'\|_2$, $\gamma = \gamma'$, $\|b\|_2 = \|b'\|_2$



WSW: $\beta = \beta'$, $\|a\|_2 = \|a'\|_2$, $\gamma = \gamma'$

SsW: $\|a\|_2 = \|a'\|_2 > \|b\|_2 = \|b'\|_2$, $\alpha = \alpha'$.

~~WWW: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$~~

Beweis. SWS: ges: geeignete Isometrie!

Da Translationen Isometrien sind: Ohne Einschränkung sei ① $= 0 =$ ①'.

Def. von f:

- (a,b) bzw. (a',b') sind Basen von $\mathbb{R}^2$, da die Eckpunkte von Δ bzw. Δ' jeweils nicht in einer gem. Geraden liegen.
- Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die ind. $\mathbb{R}$-lin Abb. mit

$$f(-a) = -a'$$
$$f(b) = b'.$$

zu zeigen: $\cdot\ f(\operatorname{im} \Delta) = \operatorname{im} \Delta'$ klar, da f lin.

$\cdot\ f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$.

f Isometrie (Richtung!)

Beweis.: Gen. zeigen: $\langle -a, b\rangle_2 = \langle f(-a), f(b)\rangle_2$

Es gilt

$$\frac{\langle b, -a\rangle_2}{\|a\|_2 \cdot \|b\|_2} = \cos\gamma \underset{\gamma = \gamma'}{=} \cos\gamma' = \frac{\langle b', -a'\rangle_2}{\underbrace{\|a'\|_2}_{=\|a\|_2} \cdot \underbrace{\|b'\|_2}_{=\|b\|_2}}$$

Also in

$$\langle b, -a \rangle_2 = \langle b', -a' \rangle_2 = \langle f(b), f(-a) \rangle_2 .$$

SSS: Mit dem Kosinussatz (Bem 3.4.2) und der SSS-Voraussetzung folgt $\cos\gamma = \cos\gamma'$, und damit $\gamma = \gamma'$ (da $\gamma, \gamma' \in [0, \pi)$).

Jetzt können wir SWS anwenden.

WSW, SsW: s. Ü 9.3. $\square$