13.07.2021

Wdh:
- euklid. Geometrie: $(\mathbb{R}^2, d_2)$
- hyperbolische Geo.: $\mathbb{H}^2$: (H, d_H)

heute → • sphärische Geometrie: S^2

4.6 VERGLEICH MIT SPHÄRISCHER GEOMETRIE

Die Sphäre: Sei $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Dann ist S^2 eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ (Analysis II):
Satz vom regulären Wert angewandt auf $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\|_2^2$ und den Wert 1

Spitze

$S^2 = f^{-1}(\{1\})$

⇝ S^2 ist eine glatte Mfkt und Abb. nach S^2 sind genau dann glatt wenn die Komp. mit $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ glatt ist (und Abl. werden wie gewöhnl. berechnet).

Das Tangentialbündel der Sphäre:

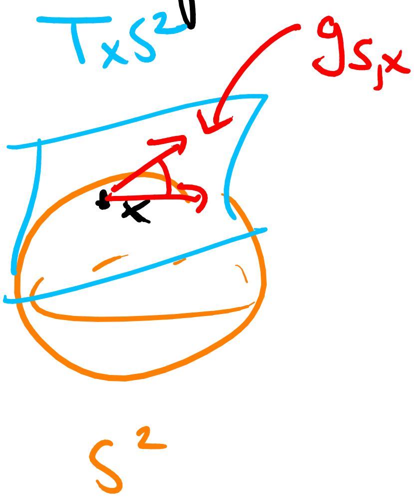
ist nicht trivial!

Konkrete Beschreibung der Tangentialräume: Ist $x \in S^2$, so gibt es eine kanon. Identifikation von T_xS^2 mit

$$\{v \in \mathbb{R}^3 \mid x \perp v\} \subset \mathbb{R}^3$$

bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$

Die sphärische riemannsche Metrik:

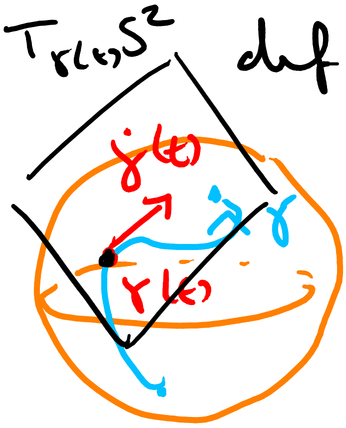


Wir betrachten die riemannsche Metrik $g_S = (g_{S,x})_{x \in S^2}$ auf S^2 geg. durch:

$$g_{S,x} := \underbrace{\langle\cdot,\cdot\rangle_2}_{\text{auf } \mathbb{R}^3}\Big|_{T_xS^2 \times T_xS^2}$$

Länge, Metrik, Winkel, (Flächeninhalt), ...

- Länge: Ist $\gamma : [T_0, T_1] \to S^2$ glatt, so def wir



$$L_{S^2}(\gamma) := \int_{T_0}^{T_1} \|\underbrace{\dot\gamma(t)}_{\in T_{\gamma(t)}S^2 \subset \mathbb{R}^3}\|_{\cancel{S,\gamma(t)}\,2} \, dt \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

· Metrik: Wir def.:

$$d_S : S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, x') \mapsto \inf \{ L_{S^2}(\gamma) \mid \gamma \text{ ist eine glatte Kurve in } S^2 \text{ von } x \text{ nach } x' \}.$$

(...) und ist eine Metrik auf S^2, die induzierte Top. ist die gewöhnl. Top. auf S^2.

· Winkel: über g_S ...

· (Flächeninhalt) μ_{S^2} z.B. $\mu_{S^2}(4\cdot\pi)$ (aufwendiger)

Beispiel: · Länge des Äquators:

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to S^2$

$t \mapsto (\sin t, \cos t, 0)$.

Dann gilt

$$\boxed{L_{S^2}(\gamma)} = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \|(\cos t, -\sin t, 0)\|_2 \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + 0^2}_{=1}} \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \boxed{2\pi}$$

· Es gilt

Länge des halben Nullmeridians

$$d_S(\text{Nordpol}, \text{Südpol}) \le \pi$$

$$d_S(\text{Nordpol}, \text{Südpol}) \ge \pi$$

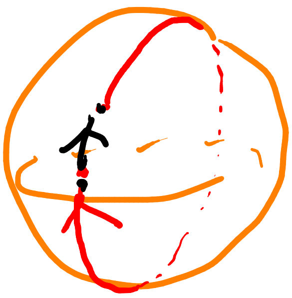
„Projektionsarg" (...)

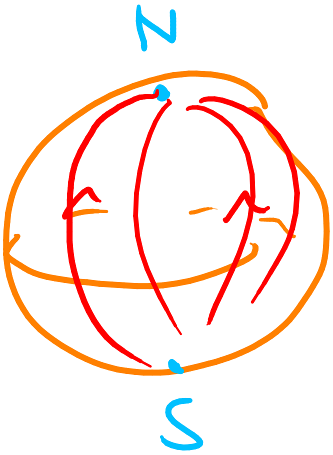
$\rightsquigarrow$ $d_S(\text{Nordpol}, \text{Südpol}) = \pi$

Geodäten: Sorgfältige Abschätzungen zeigen:

· alle Geodäten in (S, d_S) sind glatt

· die Bilder von Geodäten sind genau Segmente von <u>halben</u> Großkreisen.





unendlich viele Geodäten zw. N und S

bzw. mit den Geodäten bestimmen

Symmetrie: z.B. · Rotationen um Geraden durch 0

· Spiegelungen an Ebenen durch 0

Genauer: Die Abb.

$$O(3) \longrightarrow \mathrm{Isom}(S^2, d_S)$$

$$A \longmapsto (x \longmapsto A \cdot x)$$

$$S^2 \rightsquigarrow S^2$$

ist ein Gruppeniso.

Sphärische geodätische Dreiecke: Dual zum hyperbolischen Fall gilt:

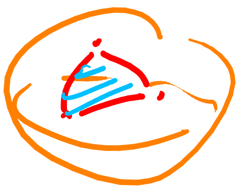
Satz. (Gauß-Bonnet für sphärische Dreiecke).
Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (S^2, d_S), das nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten ist, und seien α, β, γ die Innenwinkel von Δ.

Dann gilt

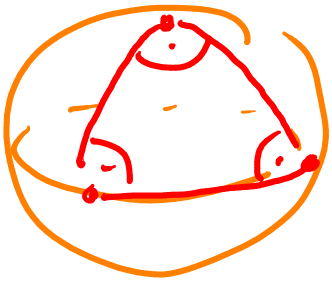
$$\mu_{S^2}(\Delta) = \overbrace{\alpha + \beta + \gamma}^{\text{Winkelsumme!}} - \pi.$$

Insbesondere: Winkelsumme $\geq \pi$.

Flächeninhalt der Komponente, die in einer Hemisphäre enthalten ist.



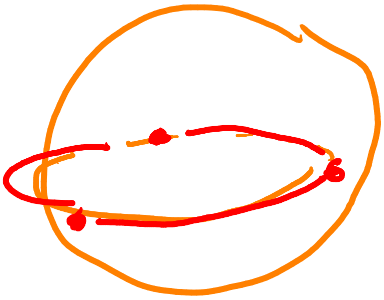
Beispiele:



- Es ex. reguläre sphärische Dreiecke, deren Innenwinkel rechte Winkel sind.

  $\rightsquigarrow$ Winkelsumme: $\frac{3}{2}\pi$

  Flächeninhalt: $\frac{\pi}{2}$.



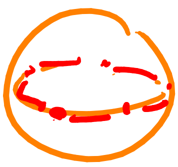
- Es ex. reguläre sphärische Dreiecke, deren Innenwinkel π sind.

  $\rightsquigarrow$ Winkelsumme: 3π

  Flächeninhalt: 2π

Sphärische Dreiecke sind „dick"
(hyp. Dreiecke sind „dünn").

Reguläre Pflasterungen: Bis auf die reg. Pflasterungen von Kissenform, ex. im wesentl. nur fünf reguläre Pflasterungen von (S^2, d_S), nämlich die, die man aus den platonischen Körpern durch „Aufblasen" erhält.



Kartographie: Analog zum hyp. Fall gilt:

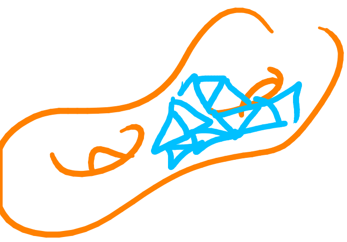
<u>Satz</u>. (S^2 ist nicht lokal isometrisch zur euklid. Ebene und umgekehrt).

Seien $U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset S^2$ offen und nicht-leer. Dann ex. <u>keine</u> Isometrie $(U, d_2) \to (V, d_S)$.

Winkelsumme!

⇝ es ex. <u>keine</u> längentreuen ebenen Karten von Ausschnitten der Erdoberfläche!

Ausblick: <u>Satz</u> (Gauß-Bonnet). Sei (M,g) eine kompakte riemannsche Mfkt der Dimension 2 (ohne Rand). Dann gilt:



$$\int_M K \, d\mathrm{vol}_M = \chi(M) \cdot 2\pi$$

Gauß-Krümmung
$K: M \to \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^2$: $K = 0$
$\mathbb{H}^2$: $K = -1$
S^2: $K = +1$

Euler-Charakteristik:
#Ecken − #Kanten + #Dreiecke in einer Triangulierung von M