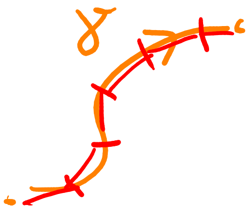
14.05.2021

Wdh: Länge stetiger Kurven $\gamma : [T_0, T_1] \to X$ in metr. Räumen (X,d):



$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ t_0, \dots, t_n \in [T_0, T_1],\ t_0 \le \dots \le t_n \right\}$$
$$\in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Proposition. Seien (X,d), (X',d') metr. Räume, sei $f : X \to X'$ eine isometr. Einbettung, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\gamma : I \to X$ eine rektifizierbare Kurve. Dann ist $f \circ \gamma : I \to X'$ eine rektifizierbare Kurve und

stetig und $L(\gamma) < \infty$

$$L(f \circ \gamma) = L(\gamma).$$

Beweis. Zu zeigen:

① $f \circ \gamma : I \to X$ ist stetig

② $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$ (insbes.: $< \infty$)

Zu ①: • Nach Vor. ist γ stetig

• Als isometr. Einb. ist f stetig $\Big\} \Rightarrow f \circ \gamma$ stetig

Zu ②: Nach Def. der Länge

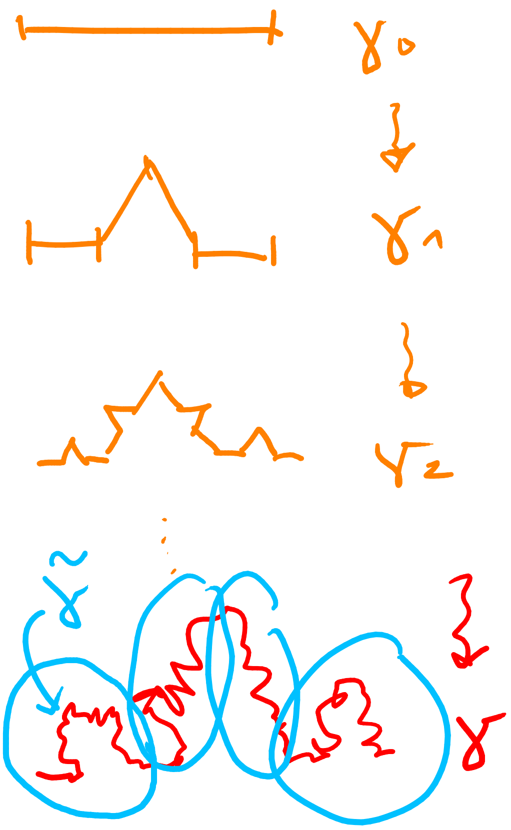
$$\boxed{L(f\circ\gamma)} \overset{\text{Def}}{=} \sup\Big\{ \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{d'\big(f\circ\gamma(t_j), f\circ\gamma(t_{j+1})\big)}_{\substack{f \text{ isometr. Einb.} \\ = d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))}} \,\Big|\, n\in\mathbb{N},\ t_0,\dots,t_n \in I,\ t_0 \le \dots \le t_n \Big\}$$

$$\overset{\text{Def der Länge}}{=} \boxed{L(\gamma)}.$$

$\square$

Beispiel. (Koch-Kurve) Induktive Konstruktion einer Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Kurven $[0,1]\to\mathbb{R}^2$

bzgl. d_2



Beobachtung: $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfkt $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

$\rightsquigarrow$ γ stetig.

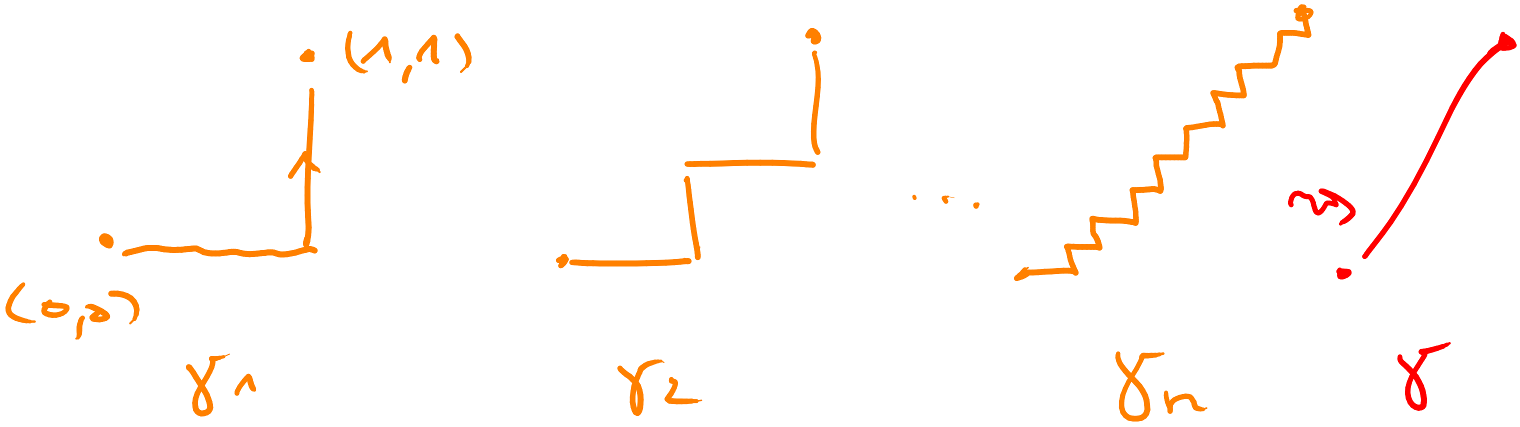
Was ist $L(\gamma)$?

$$L(\gamma) = 4 \cdot L(\tilde{\gamma}) = \boxed{\tfrac{4}{3}} \cdot L(\gamma).$$

Wegen $L(\gamma) > 0$ folgt: $L(\gamma) = \infty$.

Beispiel ($\sqrt{2} = 2$?)

Folge stetiger Kurven in $(\mathbb{R}^2, d_2)$:



$$\begin{array}{ccccccc} L(\gamma_n) & & & & & & L(\gamma) \\ \| & & & & & & \| \\ 2 & \xrightarrow[n \to \infty]{} & 2 & \overset{?}{=} & & & \sqrt{2} \end{array}$$

Ü 5.4

Frage: Kann man längenerhaltende ebene Landkarten von Ausschnitten der Erdoberfläche zeichnen?!

Beantwortung: später.

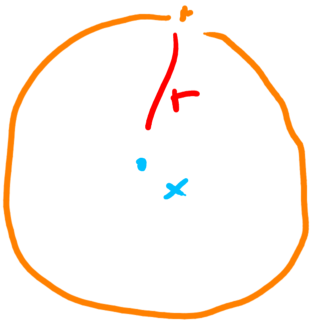
2.4 Kreise und Konstruierbarkeit

(mit Zirkel und Lineal)

Formalisierung: Kreise Geraden

2.4.1 Kreise, Sphären, Bälle

Definition. (Kreise, Sphären, Bälle).
Sei (X,d) ein metr. Raum, sei $x \in X$, sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.



- Die Sphäre in (X,d) um x vom Radius r ist

$$S_x^{(X,d)}(r) := \{ y \in X \mid d(x,y) = r \}.$$

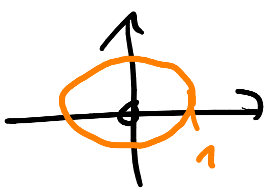
- Der Ball in (X,d) um x vom Radius r ist

$$B_x^{(X,d)}(r) := \{ y \in X \mid d(x,y) \leq r \}.$$

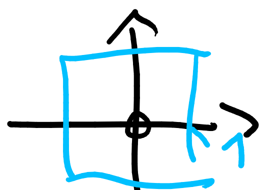
- Sphären in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ nennt man Kreise.

Beispiele. (Sphären in $\mathbb{R}^2$): (Radius 1, um 0)

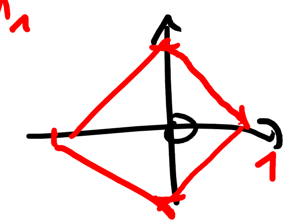
d_2



d_∞

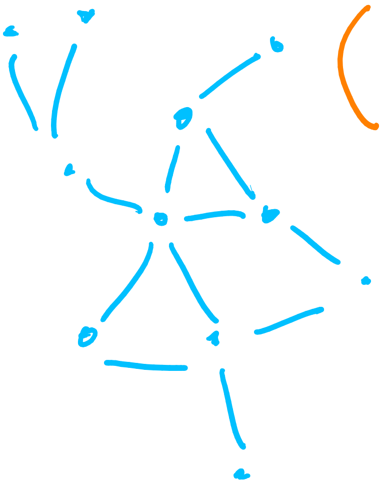


d_1



Beispiel. Sei $X=(V,E)$ ein zshgder Graph und sei d die induzierte Metrik auf V.

Sei $x \in V$.

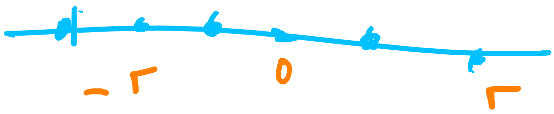


$$\left(\left| B_x^{(X,d)}(r) \right| \right)_{r \in \mathbb{N}}$$

Was passiert für $r \to \infty$?

z.B.

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{1\}) =: X$

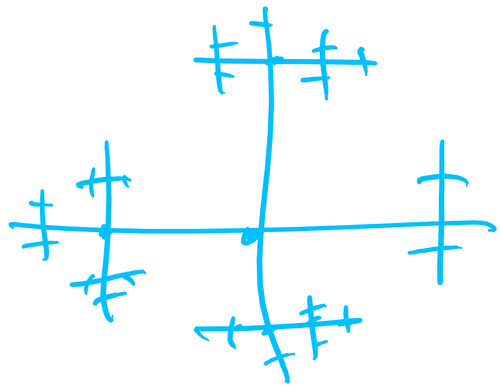


$B_0^{(X,d)}(r)$

$$\left| B_0^{(X,d)}(r) \right| = 2r+1$$

$\rightsquigarrow$ lin. Wachstum

4-regulärer Baum



exponentielles Wachstum

$\boxed{2.4.2}$ KONSTRUIERBARKEIT MIT ZIRKEL UND LINEAL

Idee: Kreise Geraden

in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Definition. (Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal).

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$. (Induktionsanfang)

- Wir def. (Induktionsschritt)

$$K(M) := K_1(M) \cup K_2(M) \cup K_3(M),$$

wobei

$G(M) :=$ Menge der Geraden in $\mathbb{R}^2$, die durch zwei versch. Pkte in M gehen

$C(M) :=$ Menge der Kreise in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, deren Mittelpkt in M liegt und deren Radius der Abstand zweier Punkte aus M ist.

$K_1(M) :=$ Menge aller Schnittpkte zweier verschiedener Geraden aus $G(M)$

$K_2(M) :=$ Menge aller Schnittpkte von Geraden aus $G(M)$ mit Kreisen aus $C(M)$.

$K_3(M) :=$ Menge aller Schnittpkte zweier verschiedener Kreise aus $C(M)$.

- Ein Pkt $x \in \mathbb{R}^2$ ist mit Zirkel und Lineal aus M <u>konstruierbar</u>, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x \in \underbrace{K(\cdots K(K}_{n \text{ mal}}(M))).$$

Grundstruktur bei Konstruktionsproblemen:

- exakte Beschreibung des Konstruktionsproblems
- Beschreibung einer Konstruktion, die das Problem löst.
- Beweis, dass die Konstruktion durchführbar ist und dass sie das gegebene Problem löst.