15.05.2024

Wdh: - $\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$,

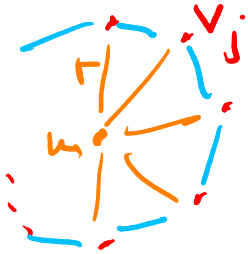
- Kongruenzsätze für euklid. Dreiecke

3.4.4 REGULÄRE POLYGONE

Idee: „viele" Symmetrien ⟹ regulär

„große" Isometriegruppe

Definition. (reguläres Polygon). Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, sei $m \in X$, sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ein reguläres n-Eck in (X,d) mit Mittelpkt m und Radius r ist ein Polygon in (X,d) mit genau n Ecken $v_1, \dots, v_n$ (in dieser Reihenfolge) und



- $\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad d(m, v_j) = r$
- $\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad d(v_j, v_{j+1}) = d(v_1, v_2)$.

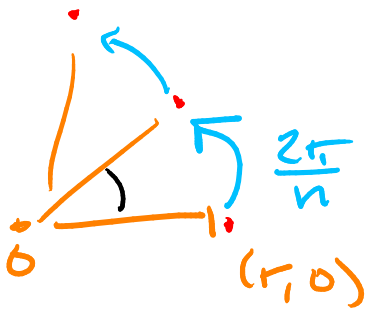
(wobei $v_{n+1} := v_1$)

Jetzt: $(\mathbb{R}^2, d_2)$

- Existenz: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ex. ein reguläres n-Eck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Mittelpkt 0 und Radius r, dann:

- Ecken: $r\cdot\left(\cos\left(j\cdot\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(j\frac{2\pi}{n}\right)\right)$

für $j\in\{1,\dots,n\}$.



+ euklid. Gradeten „dazwischen".

- Eindeutigkeit? Sind Radius und Eckenanzahl gegeben, so liegt Eindeutigkeit vor (bis auf Kongruenz).

Proposition. Sei $n\in\mathbb{N}_{\geq 3}$ und $r\in\mathbb{R}_{>0}$. Sind P und P' reguläre n-Ecke in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Radius r, so sind im P und im P' kongruent.

Beweis. Wir betrachten die Kuchenstückdreiecke

Sei $\alpha := \sphericalangle(v_2-m, v_1-m)$.

(*) Beh: $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Beweis. Sei $j\in\{1,\dots,n\}$. Dann gilt

$$\sphericalangle(v_{j+1}-m, v_j-m) = \sphericalangle(v_2-m, v_1-m) = \alpha$$

SSS + Winkeltreue von Isometrien

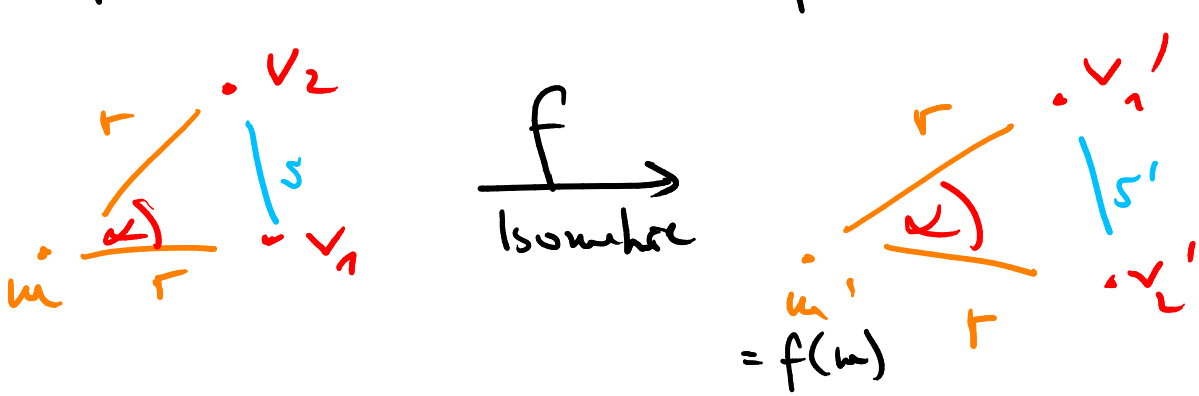
Mit dem Zshg zwischen Bogenlänge und Winkeln (da $v_1, \dots, v_n$ auf dem Kreis vom Radius r um m liegen) folgt

$$n \cdot \alpha = 2\pi. \qquad \square \ (*)$$

Anwendung von $(*)$ auf P' liefert:

$$\alpha' := \sphericalangle(v_2' - m', v_1' - m') = \frac{2\pi}{n} = \alpha.$$

Jetzt:



Nach SWS sind die gerad. Dreiecke zu (m, v_1, v_2) und (m', v_1', v_2') kongruent.

Dann gilt $f(\text{im } P) = f(\text{im } P')$:

Skizze:

- $f(\{v_1, \dots, v_n\}) = \{v_1', \dots, v_n'\}$? (z.B. über Kreis/Winkel/Bogenlänge)
- f bildet die Kanten auf die Kanten ab.

f ist eine Isometrie + Char. der Geraden in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. □

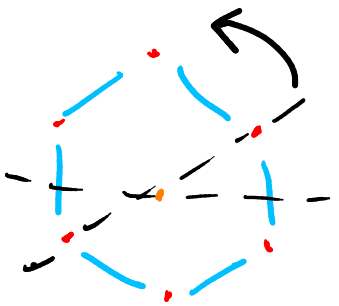
Proposition (Isometriegruppen regulärer Polygone).
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und sei P ein reguläres n-Eck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Ecken $v_1, \dots, v_n$ (in dieser Reihenfolge). Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Isom}(\mathrm{im}\, P, d_2) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \\ f &\longmapsto f|_{\{v_1,\dots,v_n\}} \end{aligned}$$

ein wohldef. Gruppeniso, wobei

$$X := \left(\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_j, v_{j+1}\} \mid j \in \{1, \dots, n\}\}\right)$$

(Graph)



- id
- Rotationen } 6 $\mathbb{Z}/6$
- Spiegelungen } 6

jede Spiegg: $\mathbb{Z}/2$

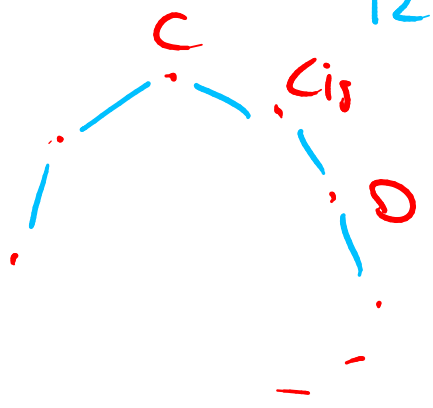
Beweis. (ü) 8.4 (für Quadrate). □

(Bem: $\mathrm{Isom}(\mathrm{im}\, P, d_2) \cong \mathrm{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}/n \rtimes \mathbb{Z}/2$ „-1")

Anwendungsmöglichkeiten:
- Kaleidoskope

(s. ü)

- Mg. 12-Ecke: Musik



12 Halbtöne (wohltemp.) „$\sqrt[12]{2}$"

- Rotation um $j \cdot \frac{2\pi}{n}$:
  Transposition
- Spiegelungen:
  Inversionen.

- Hexaflexagon.

3.4.5 REGULÄRE POLYEDER

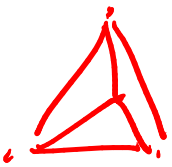
Ziel: Klassifikation der regulären Polyeder in $(\mathbb{R}^3, d_2)$.

d.L. kompakter Durchschnitt endl. vieler Halbräume in $\mathbb{R}^3$.

Definition. (regulärer Polyeder). Ein <u>regulärer Polyeder</u> in $(\mathbb{R}^3, d_2)$ ist ein konvexer Polyeder mit folgenden Eigenschaften:

- An jeder Ecke trifft sich dieselbe Anzahl an Seitenflächen.
- Es gibt ein reguläres Polygon in $(\mathbb{R}^2, d_2)$, so dass jede Seitenfläche zu diesem Polygon kongruent ist.

Beispiele für reguläre Polyeder:



Polyeder	Ecken pro Seitenfläche	Anzahl der Seitenflächen
Tetraeder	3	4
Hexaeder (Würfel)	4	6
Oktaeder	3	8
Dodekaeder	5	12
Ikosaeder	3	20

DfD

Satz. Bis auf Isometrie und Reskalierung gibt es nur fünf reguläre Polyeder in $(\mathbb{R}^3, d_2)$, nämlich: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.

Beweisskizze. Wir zeigen nur: Jeder reguläre Polyeder in $(\mathbb{R}^3, d_2)$ hat die Kombinatorik von einem der genannten Polyeder. (danach noch nötig wäre: konvexe Geometrie)

Idee: eulersche Polyederformel!

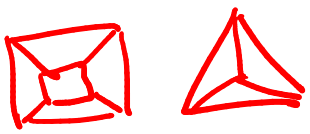
Sei P ein regulärer Polyeder in $(\mathbb{R}^3, d_2)$.

$\rightsquigarrow$ X : Graph mit

- Knoten: Ecken von P
- Kanten: entspr. den Kanten von P

„Aufblasen" $\rightsquigarrow$ Einbettung $X_{\mathbb{R}} \hookrightarrow S^2$ ← 2-Sphäre

$\rightsquigarrow$ Einbettung $X_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$



d.h. eine planare Einbettung von X

eulersche Polyederformel $\rightsquigarrow$

$$\underbrace{e}_{\#\text{Ecken von } P} - \underbrace{k}_{\#\text{Kanten von } P} + \underbrace{f}_{\#\text{Seitenflächen von } P} = 2$$

Regularität ausnutzen!

- Seitenflächen von P: reguläre n-Ecke
- an jeder Ecke kommen m Seiten zusammen

$\rightsquigarrow$

jede Kante liegt auf zwei Seitenflächen

$$\frac{n \cdot f}{2} = k$$

jede Kante verbindet zwei Ecken

$$\frac{m \cdot e}{2} = k$$

Einsetzen $\rightsquigarrow$ $2 = 2 \cdot \frac{1}{m} - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n}$.

$\Leftrightarrow$ $e - 2 + f = 2$

$\rightsquigarrow$ $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

und $n \geq 3$, $m \geq 3$

$\rightsquigarrow$ einzige Möglichkeiten für (n,m):

$(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$, $(5,3)$.

(sonst ist $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ zu klein!).

Zurückeinsetzen

$\rightsquigarrow$ genau die Daten der platonischen Körper. $\square$