6.04.2021

Wdh: Mini-Geometrie:

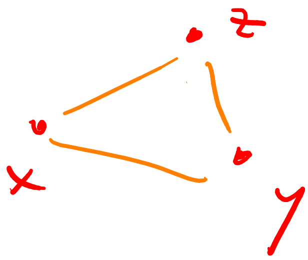
- Pkte, Geraden, liegt auf

MG1: Zwei versch. Pkte liegen auf höchstens einer gemeinsamen Geraden

MG2: Auf jeder Geraden liegen mind. zwei Pkte.

Def. (Dreieck).

- Ein <u>Dreieck</u> in MG ist ein Tripel (x,y,z) von Punkten x,y,z mit:



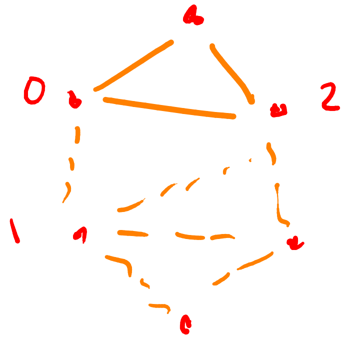
  - x und y liegen auf einer gemeinsamen Geraden
  - y und z "
  - z und x "

- Ein <u>Anti-Dreieck</u> in MG ist ein Tripel (x,y,z) von Punkten x,y,z mit: keine zwei dieser Pkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

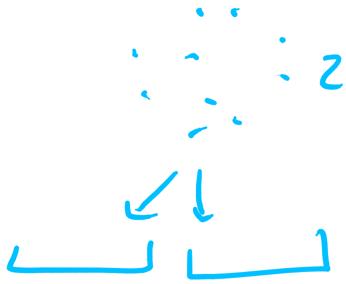
minimal!

Proposition. (Mini-Ramsey). In Mini-Geometrie gilt: Es seien sechs verschiedene Pkte gegeben: Dann: Es gibt drei versch. dieser Pkte die ein Dreieck oder ein Anti-Dreieck bilden.

Bsp:



Beweis. Idee: Schubfachprinzip:



in einer: $\geq n+1$

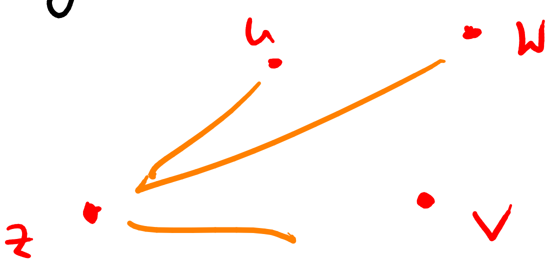
Sei z einer der sechs Punkte.

- Objekte: die übrigen $\overset{2\cdot 2+1}{\overset{\shortparallel}{5}}$ Pkte
- Schubladen: (1.) liegt auf einer Geraden mit z
  (2.) liegt nicht auf einer Geraden mit z

⇝ mindestens drei Pkte in (1)
oder " (2)

⇝ Fallunterscheidung:

(1) Es ex. Pkte u, v, w, die je auf einer grünen Geraden mit z liegen.



Weitere Fallunterscheidung:

(a) (u, v, w) ist ein Anti-Dreieck

→ $\boxed{\text{Anti-Dreieck}}$ gefunden!

(b) (u, v, w) ist <u>kein</u> Anti-Dreieck

⇝ dann ex. zwei der Pkte u, v, w, die auf einer gem. Geraden liegen, oBdA u und v.

⇝ (z, u, v) ist ein $\boxed{\text{Dreieck.}}$

② Es ex. Pkte u, v, w, die je nicht auf einer gem. Geraden mit z liegen.

⇝ analog vorgehen. $\square$

1.3 Axiome $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ Modelle

Fragen:

- Sind die Axiome erfüllbar? Auf wieviele Arten?
- Welche Aussagen lassen sich aus den Axiomen ableiten?
- Welche Aussagen gelten in jedem Modell der Axiome? Ist das dasselbe wie die vorige Frage?
- Braucht man die Axiome alle? Oder gibt es Abhängigkeiten?

⇝ Begriff des Modells

(z.B.: Gruppen sind Modelle der Gruppenaxiome)

Def. (Modell für Mini-Geometrie). Ein <u>Modell für Mini-Geometrie</u> ist ein Tripel $(P, G, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge G und einer Relation $\sqsubset \subset P \times G$, mit folgender Eigenschaft:

$(p,g) \in \sqsubset$
$\Updownarrow$
$p \sqsubset g$

Interpretiert man

- die Elte von P als Punkte
- die Elte von G als Geraden
- und $\sqsubset$ als „liegt auf",

so sind die MG-Axiome erfüllt.

Explizit:

MG 1: $\forall_{x,y \in P} \forall_{g,h \in G} \left(x \neq y \wedge x \sqsubset g \wedge y \sqsubset g \wedge x \sqsubset h \wedge y \sqsubset h \Rightarrow g = h \right)$

MG 2: $\forall_{g \in G} \exists_{x,y \in P} (x \neq y) \wedge (x \sqsubset g) \wedge (y \sqsubset g)$

Frage nach Erfüllbarkeit von Axiomen ist dieselbe wie die Frage nach der Existenz von Modellen.

Bsp für Mini-Geometrie-Modelle:

Beispiel (Graphen): Ist (V, E) ein Graph, so ist

$$(V, E, \in)$$

ein Modell für Mini-Geometrie.

vertices   edges

Menge $\subset \{\{v,w\} \mid v, w \in V, v \neq w\}$

Bsp: Graph: $(\{0,1,2,3\}, \{\{0,1\}, \{2,3\}, \{1,3\}\})$

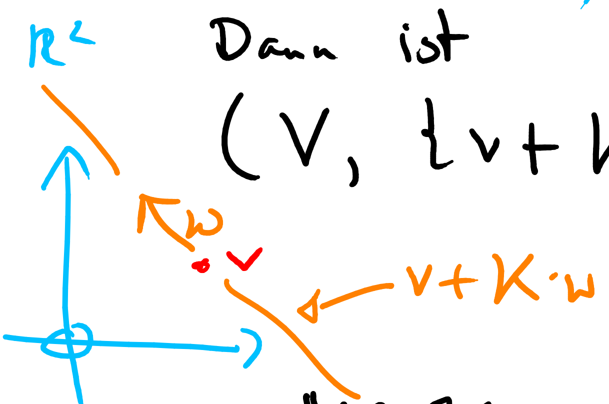
Beispiel (affine Geraden in Vektorräumen). Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(z.B. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$)

Dann ist

$$(V, \{v + K\cdot w \mid v \in V, w \in V\setminus\{0\}\}, \in)$$

ein Mini-Geometrie-Modell:



MG2: $\underbrace{v, v + 1\cdot w}_{\text{verschieden!}} \in v + K\cdot w$

MG 1: Lösungstheorie von LGS!
(LGS ansetzen und lösen ...)

Nicht-Beispiel (Großkreise auf S^2)

kein Großkreis

$(S^2,$ Großkreise auf S^2, $\in)$

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$

Großkreise auf S^2: Kreise in $\mathbb{R}^3$, die in S^2 liegen, vom Radius 1

ist <u>kein</u> Modell von Mini-Geometrie!

(wegen MG 1)

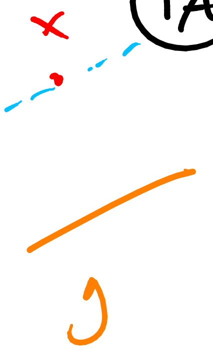
Fragen:
- Was lässt sich aus den MG-Axiomen ableiten?
- Was gilt in <u>allen</u> MG-Modellen?

ist dasselbe! (Gödelscher Vollständigkeitssatz)

„Def" (Unabhängigkeit). Ein Satz/eine Aussage S über Mini-Geometrie ist <u>unabhängig</u> von den MG-Axiomen, wenn:
- es ein MG-Modell gibt, in dem S gilt <u>und</u>
- es ein MG-Modell gibt, in dem S <u>nicht</u> gilt.

Beispiel. (Unabhängigkeit des „Parallelenaxioms" von MG)

Die Aussage



(PA) Ist x ein Punkt und g eine Gerade, so dass x nicht auf g liegt, so gibt es genau eine Gerade h, die zu g parallel ist, und so dass x auf h liegt.

ist unabh. von den MG-Axiomen, denn:

- Es ex. ein MG-Modell, das (PA) erfüllt, z.B. $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$, $(\emptyset, \emptyset, \in)$
- Es ex. ein MG-Modell, das (PA) <u>nicht</u> erfüllt, z.B. das MG-Modell zum Graphen $(\{0,1,2\}, \{\{0,1\}\})$