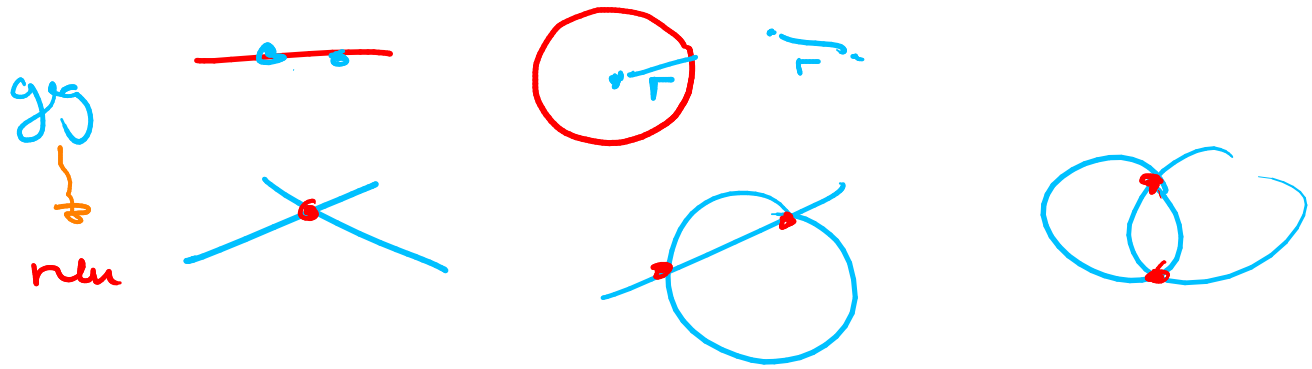
18.05.2021

Org: Klausur II: Mi, 06.10.2021 (??)

Wdh: Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal:



Grundstruktur von Konstruktionsproblemen:

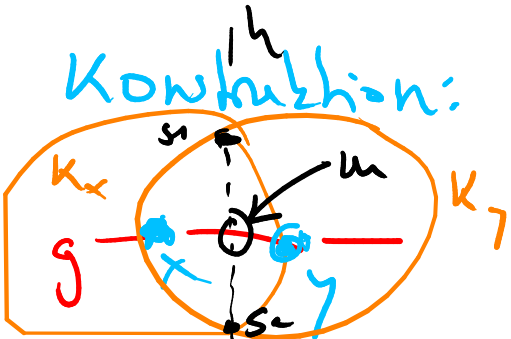
- Beschreibung des Konstruktionsproblems
- Beschreibung einer lösenden Konstruktion
- Beweis, dass die Konstruktion durchführbar ist und das Problem löst.

Beispiel. (Konstruktion des Mittelpkts zweier Punkte)

Konstruktionsproblem:

- gg.: $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq y$
- ges.: Konstruktion von $m := \frac{1}{2} \cdot (x+y)$ aus $\{x, y\}$. — „M"

Konstruktion:



1. Wir zeichnen die Gerade g durch x und y.

2. Wir zeichnen den Kreis K_x um x vom Radius $r := d_2(x,y)$.

   Analog: K_y um y.

3. Seien s_1, s_2 die Schnittpkte von K_x und K_y.

4. Wir zeichnen die Gerade h durch s_1 und s_2.

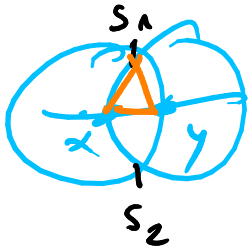
5. Der Schnittpkt von g und h ist der gesuchte Pkt m.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion:

1. Wegen $x \neq y$ ex. genau eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch x und y.

2. Wegen $x \neq y$ ist $r = d_2(x,y) > 0$.

3. Die Kreise K_x und K_y haben genau zwei Schnittpunkte, denn:



- Da die Kreise verschieden sind, gilt $|K_x \cap K_y| \leq 2$ (nachrechnen!)
- Die Punkte

$$s_1 := m + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A \cdot (y - x), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_2 := m - \frac{\sqrt{3}}{2} A \cdot (y - x)$$

  liegen in $K_x \cap K_y$ (nachrechnen!)

Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!

4. Nach 3. ist $s_1 \neq s_2$. Also ex. eine eindeutige Gerade durch s_1 und s_2.

5. Zu zeigen: g und h haben genau einen Schnittpkt, nämlich m.

- g und h haben höchstens einen Schnittpkt, denn: g und h sind verschiedene Geraden in $\mathbb{R}^2$.
- $m \in g$, denn:

$$m = \frac{1}{2} \cdot (x + y) \in g$$

($x \in g$, $y \in g$; mit $x, y \in g$ auch $m \in g \cap h$)

- $m \in h$, denn:

$$m = \frac{1}{2} \cdot (s_1 + s_2) \in h \quad . \qquad \square$$

($s_1 \in h$, $s_2 \in h$)

Ausblick: Welche Pkt sind konstruierbar?

Sei $M := \{(0,0), (1,0)\}$.

Bch: Nicht jeder Pkt in $\mathbb{R}^2$ ist aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbar

(dh.: $K(M) \neq \mathbb{R}^2$).

Beweis: • Induktiv folgt: $K(M)$ ist abzählbar.

• Aber: $\mathbb{R}^2$ ist überabzählbar.

Insbesondere ist $K(M) \neq \mathbb{R}^2$. □

Aber: Was ist $\mathbb{R}^2 \setminus K(M)$ genau ??

Insbesondere: keine Hilfe für klassische Konstruktionsprobleme:

Nein • Quadratur des Kreises π

Nein • Konstruktion der eulerschen Zahl e

Nein • Delisches Problem: Konstruktion der Kantenlänge eines Würfels mit Volumen 2 $\sqrt[3]{2}$

Nein • Dritteilung allgemeiner Winkel

• Konstruktion regulärer Vielecke — Einheitswurzeln

Nein • regulares Siebeneck

Ja! • regulares Siebzehneck

Satz. Sei $M \subset \mathbb{R}^2 \,(= \mathbb{C})$ mit $0, 1 \in M$. Sei $z \in \mathbb{C}$.

Dann sind äquivalent:

1. $z \in K(M)$
2. Es gibt eine Galoiserweiterung L

von $\mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$, deren Grad eine Zweierpotenz ist.

quadrat. Gleichungen aus den Kreisen

2.5 SYMMETRIE

Ziel: Mehr über die Symmetrien von $(\mathbb{R}^n, d_2)$ erfahren.

Strategie:

① Starrheitsphänomen: Alle Elte von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$ sind affin linear (!).

② Dann: Lineare Algebra (s. Kapitel 3).

Satz. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2)$.
Dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin linear, d.h.

$$f_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto f(x) - f(0)$$

ist $\mathbb{R}$-linear.

D.h.: Wir können $\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$
$:= \{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_2) \mid f(0) = 0\}$
als UG von $GL(n, \mathbb{R})$ auffassen.

Beweis. Idee: nutzen, dass euklid. Geraden affin lineare Abb. sind.

① Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation von Vektoren der Einheitssphäre:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $d_2(0,x) = 1$, sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beh: $f_0(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_0(x)$.

Beweis. Wegen $d_2(0,x) = 1$ ist

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto t \cdot x$$

eine Geraden in $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

f_0 Isometrie $\Rightarrow$ $f_0 \circ \gamma$ ist eine gerade Gerade.

und $f_0 \circ \gamma(0) = f_0(\gamma(0)) = f_0(0) = 0$.

Also ist: $f_0(\lambda \cdot x) = f_0(\gamma(\lambda))$

$\overset{\text{+ Char. der Geraden in } (\mathbb{R}^n, d_2)}{=} \lambda \cdot f_0(\gamma(1)) \overset{\text{(Bem 2.2.7)}}{=} \lambda \cdot f_0(x)$

① Allg. Verträglichkeit mit Skalarmult:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beh: $f_0(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f_0(x)$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$.

Sei $x' := \frac{1}{d_2(0,x)} \cdot x$.

Dann gilt:

$$f_0(\lambda \cdot x) = f_0(\lambda \cdot d_2(0,x) \cdot x')$$

$$\overset{①}{=} \lambda \cdot d_2(0,x) \cdot f_0(x')$$

$$\overset{①}{=} \lambda \cdot f_0(\underbrace{d_2(0,x) \cdot x'}_{=x})$$

② Verträglichkeit mit Addition: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$.

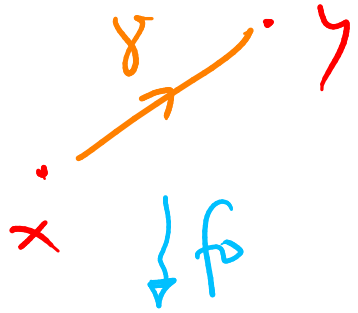
Beh: $f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x \neq y$ (nach ①').

Wir betrachten die Gerade $(x \mapsto y)$

$$\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit } L := d_2(x,y)$$

$$t \mapsto x + \frac{t}{L} \cdot (y - x).$$



f_b Isometrie $\Rightarrow$ $f_b \circ \gamma$ ist die Geodäte von $f_b(x)$ nach $f_b(y)$

Prop. 2.26 $\Rightarrow$ explizite Beschreibung von $f_b \circ \gamma$.

Also gilt:

$$f_b(x+y) = f_b\left(2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot y\right)\right)$$

$$\overset{(1)}{=} 2 \cdot f_b\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot y}_{= \gamma(1/2)}\Big)$$

$$= 2 \cdot (f_b \circ \gamma)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot f_b(x) + \tfrac{1}{2} \cdot f_b(y)\right)$$

$$= f_b(x) + f_b(y). \qquad \square$$

müssen dafür $\mathrm{Isom}(X,d)$ verstehen!

Definition. (Kongruenz). Sei (X,d) ein metr. Raum. Zwei Teilmengen $A, B \subset X$ sind kongruent, wenn es $f \in \mathrm{Isom}(X,d)$ gibt mit $f(A) = B$.