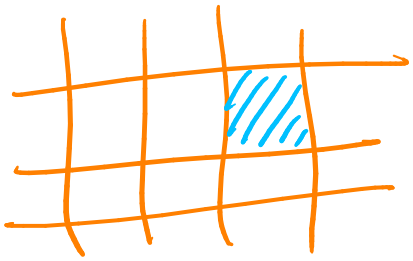
18.02.2021

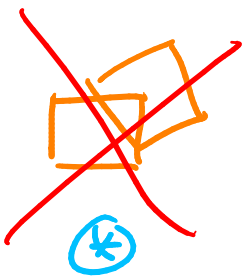
Wdh: reguläre Polygone / reguläre Polyeder in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ in $(\mathbb{R}^3, d_2)$

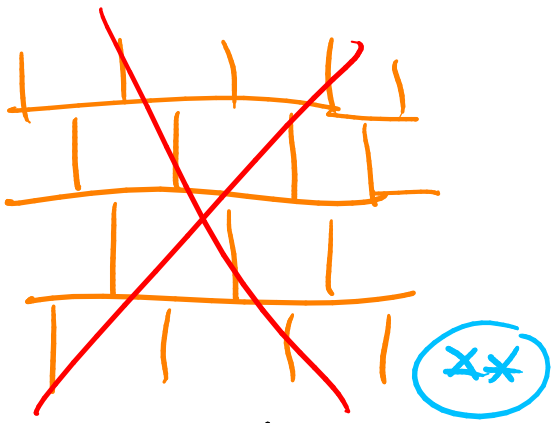
3.5 PFLASTERUNGEN DER EUKLIDISCHEN EBENE

Ziel: reguläre Pflasterungen verstehen
- ein Bsp für aperiodische Pflasterungen kennenlernen.

erster Schritt: Formalisierung von Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$.







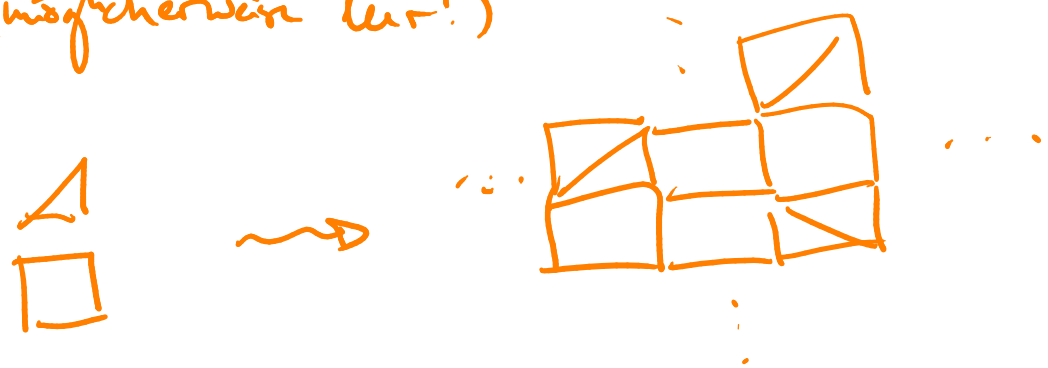
Definition (Pflasterung). Sei K eine endliche Menge von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Eine <u>Pflasterung</u> von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit <u>Prototacheln</u> aus K ist eine Menge P von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit: ← Polygon
- Zu jedem $Q \in P$ gibt es ein $Q' \in K$, so dass Q und Q' in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kongruent sind.

- Es gilt $\bigcup_{Q \in P} (\operatorname{im} Q \cup \mathring{Q}) = \mathbb{R}^2$
- Für alle $Q_1, Q_2 \in P$ mit $Q_1 \neq Q_2$ gilt

$$\mathring{Q}_1 \cap \mathring{Q}_2 = \emptyset \qquad (*)$$

und $\operatorname{im} Q_1 \cap \operatorname{im} Q_2$ ist sowohl eine Vereinigung von Kanten und Ecken von Q_1 als auch von Q_2. (**)

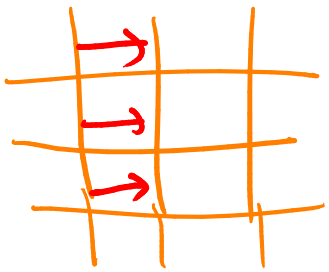
(möglicherweise leer!)



Definition. (periodische / aperiodische Pflasterung)

Eine Pflasterung P von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist periodisch, wenn es eine nicht-triviale Translation $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ gibt mit:

$$\forall_{Q \in P} \quad f(Q) \in P.$$

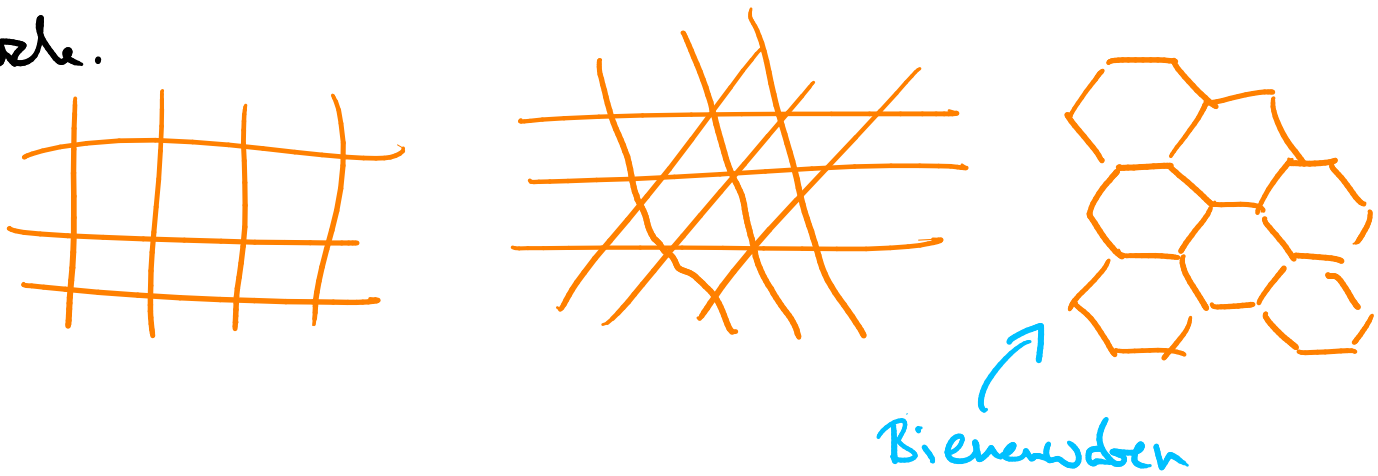


Ist P nicht periodisch, so ist P aperiodisch.

3.5.1 REGULÄRE PFLASTERUNGEN DER EUKLIDISCHEN EBENE

Definition (reguläre Pflasterung). Eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist <u>regulär</u>, wenn es nur eine Prototyp-Zelle gibt und diese ein reguläres Polygon in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist.

Beispiele.



<u>Satz</u>. Bis auf Isometrie und Skalierung gibt es nur diese drei regulären Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Beweisskizze. Sei P eine reguläre Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ durch reguläre n-Ecke (mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$). Sei $Q \in P$ und sei v eine Ecke von Q. Sei β der Winkel von Q bei v.

Dann ist $\beta = \pi - \frac{2\pi}{n}$.

(da $\alpha = \frac{2\pi}{n}$)

- Winkelsumme im Dreieck
- Rotationssymmetrie

In v treffen k Kacheln mit ihren Ecken zusammen.

Also ist $k \cdot \beta = 2\pi$.

Es ergibt sich

$$\underbrace{k \cdot \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}_{\in \mathbb{N}_{\geq 3}} = k \cdot \beta = 2\pi \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\in \mathbb{N}_{\geq 3}}$$

Somit ist

$$(n,k) \in \{(3,6), (4,4), (6,3)\}.$$

$\rightsquigarrow$ Kombinatorik der Pflasterungen

$(\dots)$

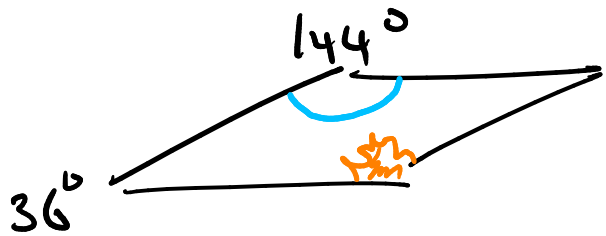
$\rightsquigarrow$ Pflasterungen sind damit klassifiziert. □

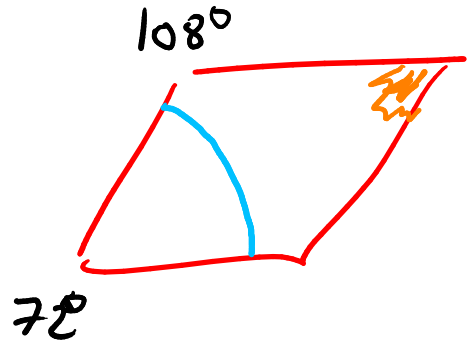
Insbes: alle regulären Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ sind periodisch!

3.5.2 APERIODISCHE PFLASTERUNGEN DER EUKLIDISCHEN EBENE

Ziel: Penrose-Pflasterungen verstehen

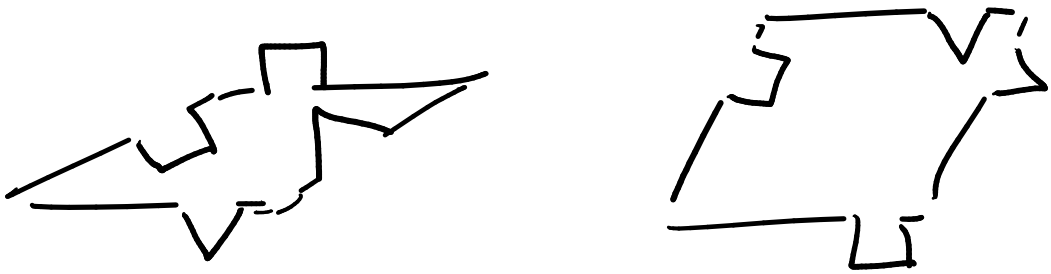
Penrose-Prototacheln:





+ Markierungen müssen zusammenpassen!

alternativ:

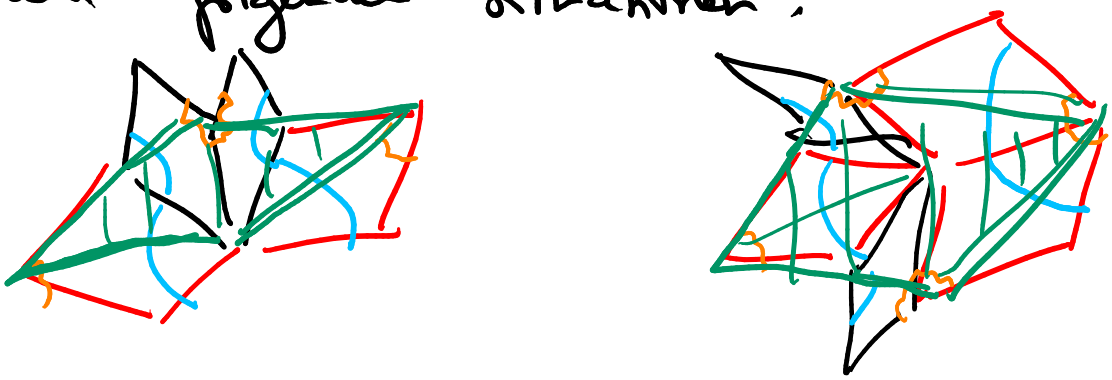


Satz 1. **jede** Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Penrose-Prototacheln ist aperiodisch (!).

2. Es existieren Pflasterungen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Penrose-Prototacheln.

Beweisskizze von 1. Sei P eine Penrose-Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Idee: „Inflation".

Inflation: Beobachtung: Jede „halbe" Kachel von P befindet sich in genau einer der beiden folgenden Situationen:



Die grünen Parallelogramme (und ihre Markierungen) können als Penrose-Prototachels, die um $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ skaliert sind, aufgefasst werden.

Also:

$$P \xrightarrow{\text{Inflation}} \text{skalierte Penrose-Pflasterung } I(P)$$

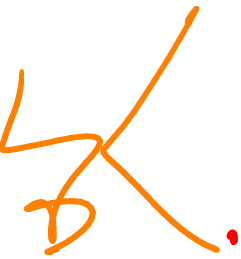
Angenommen, P wäre periodisch. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine nicht-triviale Translation von P. (d.h. f bildet Kacheln aus P auf Kacheln aus P ab).

Eindeutigkeit der Inflation $\Rightarrow$ auch $I(P)$ ist unter f (*) invariant.

Wir wählen n so groß, dass der Eckenabstand in $I^n(P)$ größer als $\|f(0)-0\|_2$ ist.

Dann gilt aber:

- f bildet Ecken von $I^n(P)$ nicht auf Ecken von $I^n(P)$ ab
- aber: $I^n(P)$ ist unter f invariant (Induktion mit ⊗).



Also ist P aperiodisch.

Zu 2. Ähnlich: Umkehrung der Inflationskonstruktion

+ „Kompaktheitsargument". □

4 ELEMENTARE RIEMANNSCHE GEOMETRIE

Ziel: Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den „anderen" Axiomen nachweisen

haben: • Modell der euklidischen Geometrie, in dem Parallelenaxiom (euklid. Ebene)

brauchen: • Modell, das die „anderen" Axiome erfüllt, aber nicht das Parallelenaxiom

⇝ Konstruktion der hyperbolischen Ebene
(über elementare riemannsche Geometrie,
d.h. mit analyt. Mitteln).

4.1 WAS IST RIEMANNSCHE GEOMETRIE?

Idee: Geometrie auf Flächen mit riemannscher Metrik „Skalarprodukt" ⇝ metr. Raum

analyt. Methoden

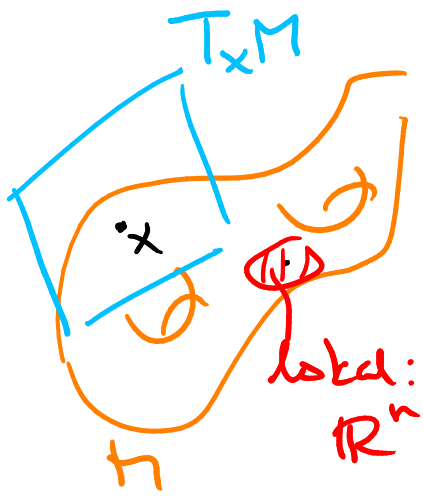
⇝ erlaubt es, Geometrie auf „komplizierten" geometr. Objekten zu betreiben
(Längen, Winkel, Krümmung, ...)

⇝ viele Anwendungen!

Wie funktioniert das?

Objekte: top. Mannigfaltigkeiten

+ glatte Struktur
(was ist diffbar?)



⇝ Tangentialräume (lin. Approx. von M)

$\rightsquigarrow$ $f: M \to N$ glatt, $x \in M$ $\rightsquigarrow$ Differential $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ (lin Abb.)

+ riemannsche Metrik: $(g_x)_{x \in M}$

Skalarprodukt auf $T_x M$ (hängt „stetig" von x ab)

$\rightsquigarrow$ Ist (M, g) eine riemannsche Mfkt und $\gamma : I \to M$ glatt, so definiert man (I Intervall)

$$L_{(M,g)}(\gamma) := \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$$

$\sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}$: Länge von $\dot\gamma(t)$ an $\gamma(t) \in M$

$\rightsquigarrow$ Metrik:

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \mapsto \inf \{ L_{(M,g)}(\gamma) \mid \gamma \text{ glatte Kurve in } M \text{ von } x \text{ nach } y \}$$