Org: Pfingstdienstag ist vorlesungsfrei!

21.05.2021

2.6 Das Extremalprinzip

„allg. Lösungsstrategie"

Idee: Betrachten Objekte, die gewisse Größen maximieren oder minimieren

z.B. in der Geometrie:

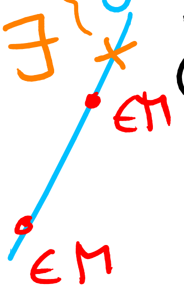
Betrachten Pkte mit max./min. Abstand

!

Satz. (Satz von Sylvester Gallai). Sei M eine endl. Menge von Pkten in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgender Eigenschaft:

$\in M$

$\exists$ g



(*) Führt eine Gerade g in $\mathbb{R}^2$ durch zwei verschiedene Pkte in M, so ex. ein weiterer Pkt aus M, der auch auf g liegt.

Dann folgt: alle Punkte aus M liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Beweis. $\underbrace{\text{Ohne Einschränkung}}_{\text{Sonst: eh erfüllt}}$ sei $|M| \geq 3$.

Idee: Extremalprinzip verwenden!

Sei G die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$, die durch mind. zwei Pkte aus M gehen. ($\Rightarrow$ $G \neq \emptyset$)

Da M endlich ist, ist auch G endlich.

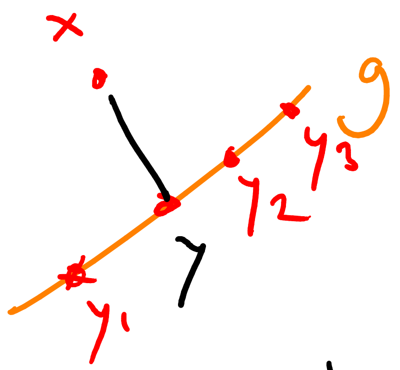
M liegt nicht auf einer Geraden.

Angenommen $\Rightarrow$ Also ex. ein Paar $(x, g) \in M \times G$ mit:

Extremalprinzip!

- $x \notin g$ und
- $\underbrace{d_2(x,g)}_{:= \cancel{\inf}\,\min \{d_2(x,y) \mid y \in g\}}$ ist unter allen solchen Paaren $\boxed{\text{minimal.}}$

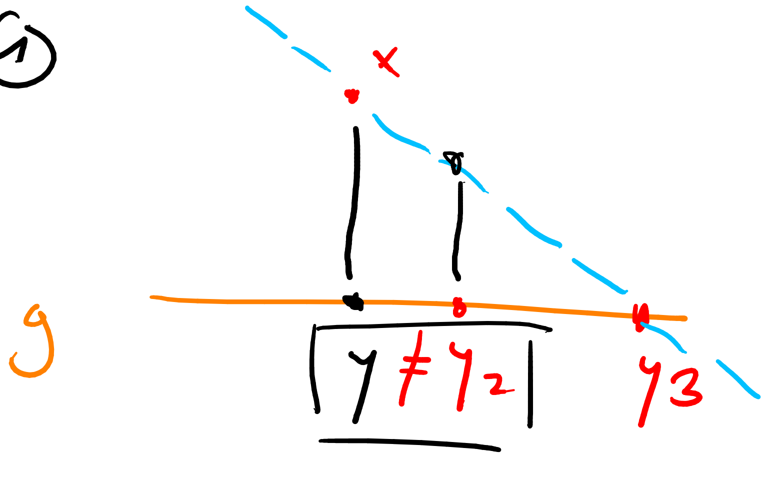
Sei $y \in g$ mit $d_2(x,y) = d_2(x,g)$.



Nach $(*)$ und Def. von G ex. drei versch. Pkte $y_1, y_2, y_3 \in M \cap g$.

Ohne Einschränkung befinden wir uns in einem der folgenden Fälle:

①



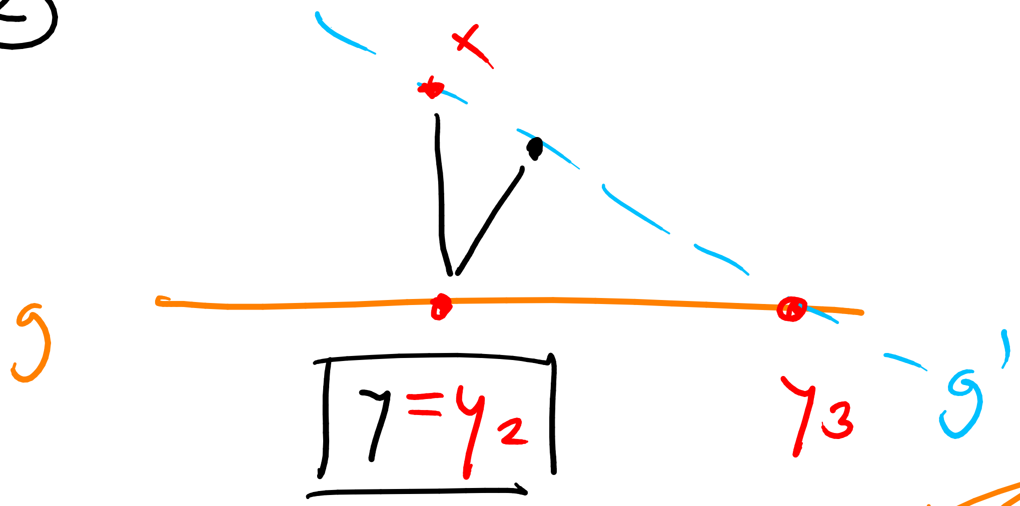
Sei g' die Gerade durch x und y_3.
(also $g' \in G$
und $y_2 \notin g'$),

(...) Was zu tun!

Aber: $\boxed{d_2(\underbrace{y_2}_{\in M}, \underbrace{g'}_{\in G})} \overset{(\dots)}{<} d_2(y,x) = d_2(x,g)$ ↯

im Widerspruch zur Minimalität von (x,g).

②



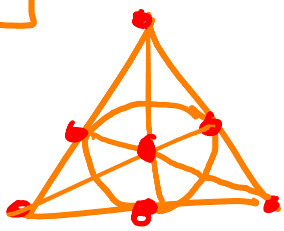
Was zu tun!

Aber: $\boxed{d_2(y_2, g')} \overset{(\dots)}{<} d_2(y,x) = d_2(x,g)$

oder $\boxed{d_2(x,g)} \overset{(\dots)}{<} d_2(x,y) = d_2(x,g)$ ↯

im Widerspruch zur Minimalität von (x,g) □

Korollar. Die Fano-Ebene kann <u>nicht</u> nach $\mathbb{R}^2$ geradlinig (oder als MW-Gewichte) eingebettet werden.



$$\left(P^2(\mathbb{F}_2),\ \text{2-dim. UVR von } \mathbb{F}_2^3,\ \subset\right)$$

$$P^2(\mathbb{F}_2) = \{\mathbb{F}_2 \cdot v \mid v \in \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}\}$$

D.h. es gibt <u>keine</u> Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $|M| = 7$, so dass:

1. je drei Pkte aus M liegen auf einer gemeinsamen Geraden und
2. jede Gerade in $\mathbb{R}^2$ enthält höchstens drei Pkte aus M.

Beweis. Nach 1. ist der Satz von Sylvester-Gallai anwendbar.

$\rightsquigarrow$ M ist einer gemeinsamen Geraden enthalten.

$\rightsquigarrow$ Widerspruch zu 2. $\square$

$\boxed{3}$ EUKLIDISCHE GEOMETRIE

Ziel: euklidische Geometrie, d.h. in $(\mathbb{R}^n, d_2)$;
mit mehr Hilfsmitteln:

Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ⇝ Orthogonalität,
Winkel,
Volumina,
⋮

↓

Norm $\|\cdot\|_2$

↓

Metrik d_2

⇝ können lineare Algebra und Analysis einsetzen!

$\boxed{3.1}$ NORMIERTE RÄUME UND SKALARPRODUKTE

$\boxed{3.1.1}$ NORMIERTE RÄUME

Def. (Norm). Ein normierter Raum ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem $\mathbb{R}$-VR V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V.

Eine <u>Norm</u> auf V ist eine Abb.
$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

- $\forall_{x \in V \setminus \{0\}} \quad \|x\| > 0.$
- $\forall_{x \in V} \forall_{\lambda \in \mathbb{R}} \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$
- $\forall_{x,y \in V} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Norm $\Rightarrow$ Metrik: Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x,y) \longmapsto \|x - y\|$$

eine Metrik.

Beispiele auf $\mathbb{R}^n$:

- $d_2 \Leftarrow \|\cdot\|_2 : x \longmapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$
- $d_1 \Leftarrow \|\cdot\|_1 : x \longmapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j|$
- $d_\infty \Leftarrow \|\cdot\|_\infty : x \longmapsto \max_{j \in \{1,\dots,n\}} |x_j|.$

- die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}^n$ (mit $n>0$) wird <u>nicht</u> von einer Norm induziert (Homogenität!)

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x=y \\ 1 & \text{falls } x\neq y \end{cases}$$

(Bem: alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.)

$\boxed{3.1.2}$ SKALARPRODUKTE

Def. (Skalarprodukte) Ein <u>Skalarprodukt</u> auf einem $\mathbb{R}$-VR V ist eine $\mathbb{R}$-bilin. Abb

$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ mit

- $\forall_{x,y\in V} \quad \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
- $\forall_{x\in V\setminus\{0\}} \quad \langle x,x\rangle > 0$.

Skalarprodukt $\rightsquigarrow$ Norm Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklid. VR (d.h. ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt). Dann ist

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{aligned}$$

eine Norm auf V.

(Für die Dreiecksungleichung: Cauchy-Schwarz)

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Außerdem gilt Polarisierung:

$$\forall_{x,y \in V} \quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Beispiel in $\mathbb{R}^n$:

- $d_2 \leftarrow \|\cdot\|_2 \leftarrow$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$$

allg.: Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ $\longleftrightarrow$ symmetrische, pos. definite $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto x^T \cdot A \cdot y$$

- d_1, d_∞ sind nicht von Skalarprodukten induziert!

(Widerspruch zu Polarisierung!)

Satz: Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle), (V', \langle\cdot,\cdot\rangle')$ endlich-dim endlich. $\mathbb{R}$-VR, mit $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V'$ Dann:

Es ex. ein $\mathbb{R}$-lin Iso $f: V \to V'$

mit

$$\forall_{x,y \in V} \ \langle f(x), f(y) \rangle' = \langle x, y \rangle.$$

$\rightsquigarrow$ Insbes.: f ist eine Isometrie bzgl. der induzierten Metriken.