22.06.2021

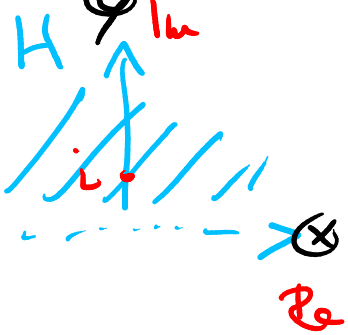
4.2 KONSTRUKTION DER HYPERBOLISCHEN EBENE (mithilfe elementarer riemannscher Geometrie)

Kurzfassung: Die hyperbolische Ebene ist die glatte Mfkt, die durch die obere Halbebene in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist, mit der riemannschen Metrik

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Jetzt: ausführliche Version.

Definition. (obere Halbebene) Die <u>obere Halbebene</u> ist def. als



$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

offen

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$$

Definition. (hyperbolische Ebene) Die <u>hyperbolische Ebene</u> $\mathbb{H}^2$ ist die riemannsche Mfkt (H, g_H), wobei

- $H \subset \mathbb{R}^2$ die gewöhnliche glatte Standardmfkt (wie in Analysis II)

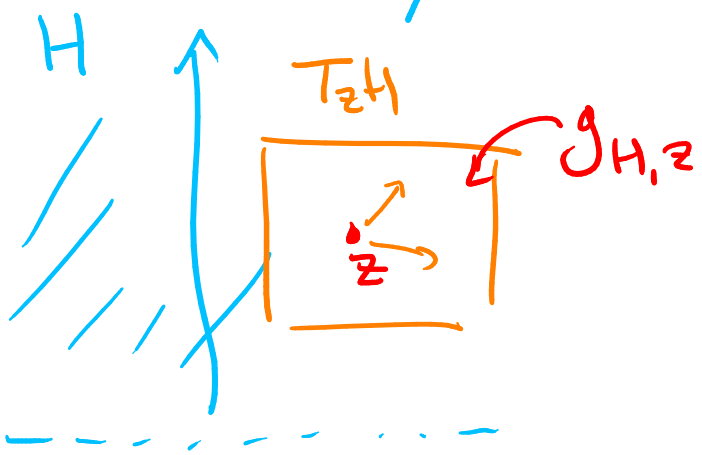
- und die riemannsche Metrik $g_H = (g_{H,z})_{z \in H}$ wie folgt gegeben ist:

Zu $z \in H$ sei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H,z} := g_{H,z} : \underbrace{T_z H}_{= \mathbb{R}^2} \times \underbrace{T_z H}_{= \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

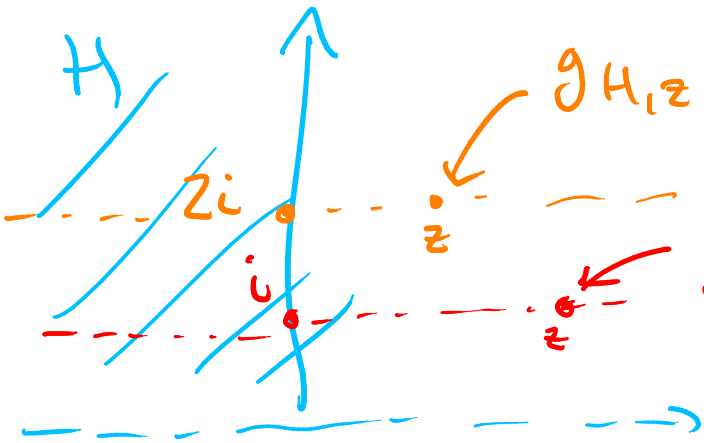
$$(v, w) \longmapsto \frac{1}{y^2} \cdot \langle v, w \rangle$$

$= (x, y)$



Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$

$\rightsquigarrow$ Norm $\| \cdot \|_{H,z}$ auf $T_z H$.



$$\| \cdot \|_{H,z} = \frac{1}{2} \cdot \| \cdot \|_2$$

$$\| \cdot \|_{H,z} = \| \cdot \|_2$$

Ableitungen: Notation: Ist $f : H \longrightarrow H$ glatt und $z \in H$, so schreiben wir

$$T_z f : \underbrace{T_z H}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underbrace{T_{f(z)} H}_{\mathbb{R}^2}$$

für das Differential/die Ableitung von f an der Stelle z.

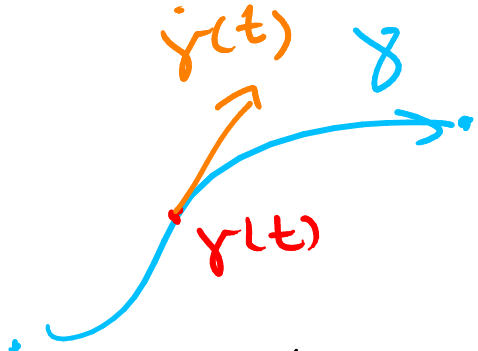
4.3 LÄNGE VON KURVEN

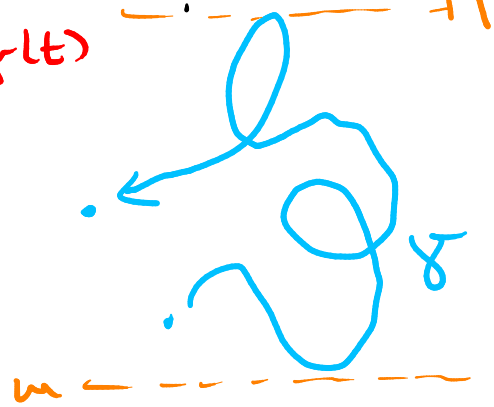
Idee: Wir verwenden die analyt. Beschreibung der Länge von Kurven in euklid. Räumen als Def.

Definition (hyperbolische Länge einer Kurve). Sei $\gamma: [T_0, T_1] \to H$ eine glatte Kurve. Dann ist die hyperbolische Länge von γ def. als

$$L_{H^2}(\gamma) := \int_{T_0}^{T_1} \| \dot\gamma(t) \|_{H, \gamma(t)} \, dt$$

$\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)} H$





da $[T_0, T_1]$ kompakt und γ stetig!

Proposition (triviale Abschätzung). Sei $\gamma: [T_0, T_1] \to H$ eine glatte Kurve und sei

$$m := \min \{ |\mathrm{Im}\, \gamma(t)| \mid t \in [T_0, T_1] \} > 0$$

$$M := \max \{ |\mathrm{Im}\, \gamma(t)| \mid t \in [T_0, T_1] \} > 0$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{m} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_e)}(\gamma) \overset{(3)}{\geq} L_{H^2}(\gamma) \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{M} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_e)}(\gamma) \overset{(2)}{\geq} \frac{1}{\pi} \cdot d_e(\gamma(T_0), \gamma(T_1))$$

Beweis: ① Es gilt

$$L_{H^2}(\gamma) = \int_{T_0}^{T_1} \|\dot\gamma(t)\|_{H,\gamma(t)}\, dt = \frac{1}{\operatorname{Im}\gamma(t)} \cdot \|\dot\gamma(t)\|_2 \geq \frac{1}{M}$$

$$\geq \frac{1}{M} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \|\dot\gamma(t)\|_2\, dt \qquad \text{Satz 3.2.4}$$

$$= L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma)$$

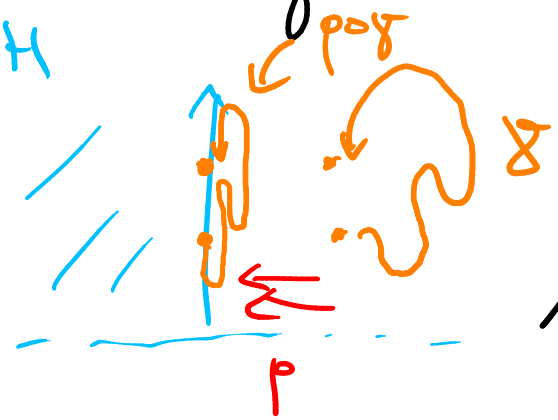
② Wir haben

$$L_{H^2}(\gamma) \overset{①}{\geq} \frac{1}{M} \cdot L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma) \qquad \text{Def. bzw. Prop. 2.3.3}$$

$$\geq d_2(\gamma(T_0), \gamma(T_1))$$

③ Analog zu ①. □

Proposition. (verkürzende Abschätzung). Sei $\gamma : [T_0, T_1] \to H$ eine glatte Kurve und sei $p : i \cdot \operatorname{Im} : H \to H$ die Projektion auf die imaginäre Achse.



1. Dann gilt

$$L_{H^2}(\gamma) \geq L_{H^2}(p \circ \gamma)$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\operatorname{Re}\gamma$ konstant ist.

2. Außerdem: $L_{H^2}(p\circ\gamma) \geq \left| \ln \operatorname{Im}\gamma(T_1) - \ln \operatorname{Im}\gamma(T_0)\right|$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn die Ableitung von $\operatorname{Im}\gamma$ das Vorzeichen nicht ändert.

Beweis. 1. Sei $\tilde\gamma := p\circ\gamma$. Dann ist $\tilde\gamma$ glatt und

$$\forall_{t\in(T_0,T_1)} \quad \|\dot{\tilde\gamma}(t)\|_{H,\tilde\gamma(t)} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \|T_{\gamma(t)}p\,(\dot\gamma(t))\|_{H,\tilde\gamma(t)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Im}\tilde\gamma(t)} \cdot \|T_{\gamma(t)}p\,(\dot\gamma(t))\|_2$$

$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(0,y)$, $H,\tilde\gamma(t)$: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$= \frac{1}{\operatorname{Im}\gamma(t)}$$

Pythagoras

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\operatorname{Im}\gamma(t)} \cdot \|\dot\gamma(t)\|_2$$

$$= \|\dot\gamma(t)\|_{H,\gamma(t)}.$$

$\rightsquigarrow L_{H^2}(\tilde\gamma) \leq L_{H^2}(\gamma)$.

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn bei $(*)$ immer Gleichheit vorliegt (d.h. $\operatorname{Re}\gamma$ konstant ist).

2. Sei $f := \ln \gamma = \ln(\rho \circ \gamma)$. Dann gilt

$$L_{H^2}(\rho\circ\gamma) = \int_{T_0}^{T_1} \|(\rho\circ\gamma)'(t)\|_{H,\gamma(t)}\, dt$$

Rechnung wie oben $\rightarrow$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \frac{|\dot f(t)|}{f(t)}\, dt \geq \left| \int_{T_0}^{T_1} \frac{\dot f(t)}{f(t)}\, dt \right|$$

Analysis I $\rightarrow$

$$= \left| \int_{T_0}^{T_1} (\ln f)'(t)\, dt \right| \overset{\text{HDI}}{=} |\ln f(T_1) - \ln f(T_0)|$$

$$= |\ln \ln \gamma(T_1) - \ln \ln \gamma(T_0)|.$$

Gleichheit gilt (ug ⊛) genau dann, wenn f das Vorzeichen nicht wechselt. □

Proposition. (Metrik auf H^2) Wir definieren

$$d_H : H \times H \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

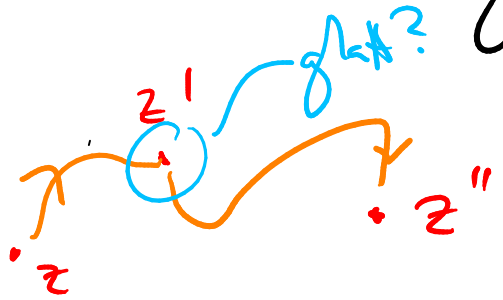
$$(z, z') \mapsto \inf\{L_{H^2}(\gamma) \mid \gamma \text{ ist eine glatte Kurve in } H \text{ von } z \text{ nach } z'\}.$$

Dies ist eine Metrik auf H.

Beweis. • Definitheit. (ü) 11.4

• Symmetrie. ✓ „rückwärts laufen"

• Dreiecksungleichung: Hintereinanderdurchlaufen von Kurven



+ technisches Problem: Glattheit bei der Verklebung □

Fragen:
- Wie kann man d_H „berechnen"?
- Was sind die Geodäten in (H, d_H)?
- Was sind die Isometrien in (H, d_H)?

Antwort: simultan entwickeln!

Proposition. (vertikale Geodäten). Sei $y \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann gibt es in H^2 genau eine [glatte] Geodäte (bzgl. d_H) von i nach $i \cdot y$, nämlich

$$\gamma : [0, \ln y] \to H, \quad t \mapsto i \cdot e^t.$$

Für diese gilt $L_{H^2}(\gamma) = \ln y$.

Also: $d_H(i, i \cdot y) = \ln y$.

Beweis. ① Länge von γ: Mit der vertikalen Abstandsformel folgt: $L_{H^2}(\gamma) = \ln e^{\ln y} - \ln e^0 = \ln y$.

Analog:

$\forall_{t_0 < t_1 \in [0, \ln y]} \; L_{H^2}(\gamma|_{[t_0,t_1]}) = \ln e^{t_1} - \ln e^{t_0}$

$= t_1 - t_0.$

(2) γ ist eine Geodäte, denn:

Nach der vertikalen Abschätzung gilt:

$\forall_{y_1, y_0 \in [1,\gamma]} \; d_H(i\cdot y_0, i\cdot y_1) = \inf L_{H^2}\cdots$

$y_1 > y_0$

$\overset{(A)}{=} \ln y_1 - \ln y_0.$

$\rightsquigarrow$ Es folgt: γ ist eine Geodäte in (H, d_H) von i nach $i\cdot y$.

(3) Eindeutigkeit: Sei $\eta : [0, L] \to H$ eine glatte Geodäte von i nach $i\cdot y$. Also ist $L = \ln y$.

(!) (A) III.13

Beh: $\operatorname{Re}\eta = 0$!

Bew. Es gilt $L_{H^2}(\eta) = L_{(H,d_H)}(\eta)$

$= d_H(\eta(0), \eta(L)) = L = \ln y$

$= |\ln \ln \eta(L) - \ln \ln \eta(0)|.$

vertikale Abschätzung $\rightsquigarrow$ $\operatorname{Re}\eta$ konstant $\rightsquigarrow$ $\eta(0) = i$ $\operatorname{Re}\eta = 0$. $\square$

Also: Da η eine Geodäte ist, gilt

$$\forall_{t\in[0,L]} \quad t-0 = d_H(\eta(t),\eta(0)) \qquad (\eta(0)=0)$$

$$= \ln\ln\eta(t) - \ln\ln\eta(0)$$

$$= \ln\ln\eta(t).$$

$\eta(0)=i$

$\rightsquigarrow \forall_{t\in[0,L]} \quad \eta(t) = i\cdot e^t = \gamma(t).$

$\ln\eta=0$

□