Wdh: MG: abstraktes Setting für Pkte / Geraden (Graphen, A(V); Unabh. & Parallelenaxiome, Mini-Ramsey) + Formalisierung in Lean

23.04.2021

1.5 SYMMETRIE

Allg. Frage: Was ist Symmetrie?

Idee: mathemat. Theorie besteht aus

Kategorie:
- Objekten z.B. $\mathbb{R}$-Vektorräume, Gruppen, ...
- Morphismen z.B. $\mathbb{R}$-lin. Abb., Gruppenhom., ...
  („strukturerhaltende Abb.")

(...) ⇝ Isomorphismen ⇝ Automorphismen (Symmetrien)

Def. (Morphismen von Mini-Geometrien). Seien $M = (P, G, \sqsubset)$ und $M' = (P', G', \sqsubset')$ Mini-Geometrie-Modelle.

- Ein <u>Morphismus</u> $M \longrightarrow M'$ ist ein Paar (f, F), bestehend aus Abb. $f: P \longrightarrow P'$ und $F: G \longrightarrow G'$, mit

$$\forall_{x \in P} \forall_{g \in G} \; \underbrace{x \sqsubset g}_{\text{in } M} \implies \underbrace{f(x) \sqsubset' F(g)}_{\text{in } M'}.$$

strukturerhaltend

- Seien $(f,F):(P,G,I)\to(P',G',I')$ und

  $(f',F'):(P',G',I')\to(P'',G'',I'')$

  Morphismen von MG-Modellen. Dann def. wir die <u>Verknüpfg</u> durch

$$\underbrace{(f',F')\circ(f,F)}_{:(P,G,I)\to(P'',G'',I'')} := (\overbrace{f'\circ f}^{:P\to P''},\ \overbrace{F'\circ F}^{:G\to G''})$$

  (ist ein Morphismus!)

- Ist $M=(P,G,I)$ ein MG-Modell, so nennen wir

$$id_M := (id_P,\ id_G) \quad \text{(ist ein Morphismus!)}$$

  den <u>Identitätsmorphismus</u> von M.

- MG-Modelle M und M' heißen <u>isomorph</u>, wenn es Morphismen $\varphi: M\to M'$ und $\psi: M'\to M$ gibt mit

$$\psi\circ\varphi = id_M \quad \text{und} \quad \varphi\circ\psi = id_{M'}.$$

  In diesem Fall heißen φ und ψ <u>Isomorphismen</u>.

Beispiel. (Morphismen von Graphen). Seien $X=(V,E)$, $X'=(V',E')$ Graphen. Ein <u>Morphismus $X\to X'$ von Graphen</u> ist eine Abb $f\colon V\to V'$ mit

$$\forall_{\{\underbrace{x,y}_{\in V}\}\in E}\quad \{\underbrace{f(x),f(y)}_{\in V'}\}\in E'.$$

Dann: Ist $f\colon V\to V'$ eine Abb., so ist f genau dann ein Morphismus $X\to X'$, wenn (f,F) ein Morphismus zw. den zugehörigen MG-Modellen ist. Wobei

$$F\colon E\longrightarrow E'$$
$$\{x,y\}\longmapsto\{f(x),f(y)\}.$$

Beispiel. (affine Geraden in VR). Sei K ein Körper und seien V, V' K-VR. Sei $f\colon V\to V'$ eine $\underbrace{\text{affin } K\text{-lin.}}$ Abb.

(d.h. $V\longrightarrow V'$, $x\longmapsto f(x)-f(0)$ ist K-lin)

Wdh.: $A(V)=\Bigl(V,\ \{v+U \mid v\in V,\ U\subset V \text{ ein-dim } K\text{-UVR}\},\ \in\Bigr)$

Sei $F\colon \underbrace{v+U}_{\subset V}\longmapsto \underbrace{f(v+U)}_{\subset V'}$.

Dann: (f,F) ist genau dann ein Morphismus $A(V) \to A(V')$ von MG-Modellen, wenn f injektiv ist.

Prop. Seien $M = (P, G, \Sigma)$, $M' = (P', G', \Sigma')$ MG-Modelle mit $M \underset{MG}{\cong} M'$. Dann folgt:

$$|P| = |P'| \quad \text{und} \quad |G| = |G'|.$$

Beweis. Seien $(f,F): M \to M'$ und $(f',F'): M' \to M$ zueinander inverse Isos.

$\leadsto$ $f' \circ f = id_P$ und $f \circ f' = id_{P'}$

$\leadsto$ $f: P \to P'$ ist eine Bijektion

$\leadsto$ $|P| = |P'|$

analog für $|G| = |G'|$. $\square$

$\leadsto$ es ex. unendl. viele essentiell verschiedene (d.h. paarweise nicht isomorphe) MG-Modelle

z.B.: durch Variation der Mächtigkeit der Punktmengen

z.B. für $n \in \mathbb{N}$: $(\{1, .., n\}, \emptyset, \in)$

Prop. Sei K ein Körper und seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

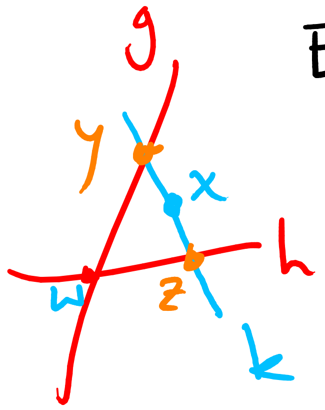
$$A(K^n) \underset{MG}{\cong} A(K^m) \iff n = m.$$

Beweis. $\Longleftarrow$: ✓ (via id)

$\Longrightarrow$: Wir betrachten $n=2$, $m=3$ (Ü z.B.: allg)

Idee: Wir betrachten „Ebenen" in MG

Seien g, h Geraden in einem MG-Modell $(P,G,\sqsubset)$, die sich in genau einem Pkt schneiden. Dann def. wir



$$E_{(P,G,\sqsubset)}(g,h) := \{ x \in P \mid \exists_{k \in G}\ x \sqsubset k \wedge \exists_{y,z \in P}\ y \neq z \wedge y \sqsubset k \wedge y \sqsubset g \wedge z \sqsubset k \wedge z \sqsubset h \}$$

$$\rightsquigarrow \overbrace{E_{A(K^3)}(g,h) \cup \{w\}}^{=:E'}$$ ist ein zwei-dim affiner Unterraum von K^3

w: Schnittpkt von g und h

$\rightsquigarrow$ ex. $\boxed{x \in K^3 \setminus E'}$.

Angenommen, es ex. ein MG-Iso (f, F)
$: A(K^3) \to A(K^2)$.

$$\rightsquigarrow f(E') = f(E_{A(K^3)}(g, h) \cup \{w\})$$

strukturerh. + Iso

$$= \underbrace{E_{A(K^2)}(F(g), F(h)) \cup \{f(w)\}}_{=: E \quad \text{2-dim affiner } K\text{-UVR von } K^2}$$

$$\rightsquigarrow E = K^2.$$

aber: $f(x) \notin E$ $\lightning$ $\square$

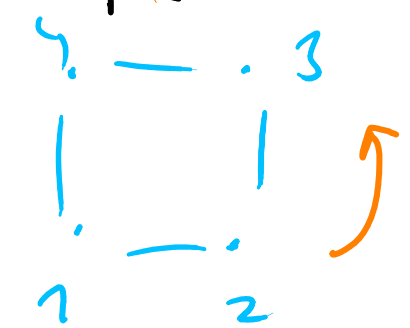
Def (Symmetriegruppe eines MG-Modells). Sei M ein MG-Modell. Die Menge aller MG-Isos $M \to M$ bildet eine Gruppe (!) bzgl. Verknüpfung von Morphismen. Dies ist die <u>Symmetriegruppe</u> von M:

$$\mathrm{Aut}_{MG}(M).$$

<u>Beispiel</u>. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathrm{Aut}_{MG}(\{1, \dots, n\}, \emptyset, \in) \underset{\text{Gruppe}}{\cong} S_n.$$

$\bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet$
$1 \quad 2 \quad\quad\quad n$

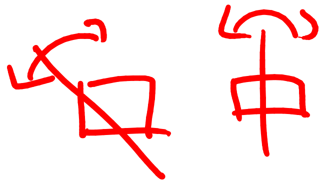


Beispiel. Sei $M := (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}, \in)$.

Dann:

$$\mathrm{Aut}_{MG}(M) \cong_{\text{Group}} \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$$

„Rotationen" (inkl. id)



„Spiegelungen" (vier Stück)

1.6 Der geometrische Blickwinkel

Ziel: „nicht-geometr." Probleme durch geometr. Methoden lösen.

1.6.1 Ramsey-Zahlen

Beispiel. Unter sechs Personen gibt es

- drei, die sich untereinander alle kennen, oder
- drei, die sich untereinander alle <u>nicht</u> kennen.

Denn: Mini-Ramsey anwenden auf

die Mini-Geometrie zu dem Graphen

- mit Knoten: 6 Personen
- mit Kanten: „falls Bekanntschaft ex"

⇝ Ramsey-Zahlen