25.06.2025

Wdh: Konstruktion der hyperbolischen Ebene:

- H obere Halbebene
- g_H hyp. riem. Metrik auf H

$\Rightarrow \mathbb{H}^2 := (H, g_H)$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H,z} = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_2$

$\Rightarrow L_{\mathbb{H}^2} \Rightarrow d_H$: Metrik auf H.

4.4 SYMMETRIE

Ziel: Bestimmung der Isometriegruppe $\operatorname{Isom}(H, d_H)$ und aller Geodäten in (H, d_H).

Idee: simultan beide Probleme lösen

4.4.1 RIEMANNSCHE ISOMETRIEN

Idee: analytische Def. von d_H nutzen

$\Rightarrow$ analyt. Quelle für Isometrien.

Definition. (riemannsche Isometriegruppe). „strukturerhaltende bo" Eine riemannsche Isometrie $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ ist ein glatter Diffeomorphismus $f: H \to H$ mit

$\forall_{z \in H} \; \forall_{v,w \in T_z H} \quad \langle \underbrace{T_z f}_{: T_z H \to T_{f(z)} H}(v), T_z f(w) \rangle_{H, f(z)} = \langle v, w \rangle_{H,z}$

Die riemannsche Isometriegruppe von $\mathbb{H}^2$ ist die Menge $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ aller riemannschen Isometrien $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ bzgl. Abb.komposition. (tatsächlich eine Gruppe!)

Proposition. Ist $f: \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ eine riem. Isometrie von $\mathbb{H}^2$, so ist $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ eine Isometrie bzgl. $d_{\mathbb{H}}$.

Def. via $\inf\{L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \mid \dots\}$

$\rightsquigarrow$ injektiver Gruppenhom. $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$.

Beweis. ① Was passiert mit $L_{\mathbb{H}^2}$ unter f?

Sei $\gamma: [T_0, T_1] \to \mathbb{H}$ eine glatte Kurve in $\mathbb{H}$.

Dann gilt

$$L_{\mathbb{H}^2}(f \circ \gamma) = \int_{T_0}^{T_1} \| (f\circ\gamma)^{\cdot}(t) \|_{\mathbb{H}, f\circ\gamma(t)} \, dt$$

Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \| T_{\gamma(t)} f(\dot\gamma(t)) \|_{\mathbb{H}, f\circ\gamma(t)} \, dt$$

da f eine riem. Isometrie ist $\rightsquigarrow$

$$= \| \dot\gamma(t) \|_{\mathbb{H}, \gamma(t)}$$

$$= L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$$

② Aus ① folgt:

$$\forall_{z,z' \in H} \quad d_H(f(z), f(z')) = \inf \{ L_{H^2}(\eta) \mid \eta : f(z) \rightsquigarrow f(z') \}$$

$$\leq \inf \{ L_{H^2}(f \circ \gamma) \mid \gamma : z \rightsquigarrow z' \}$$

$$= L_{H^2}(\gamma) \overset{①}{=} d_H(z, z').$$

③ Wendet man ② auf f^{-1} an, so folgt

$$\forall_{z,z' \in H} \quad d_H(f(z), f(z')) \geq d_H(z, z').$$

Mit ① und ③ erhalten wir:

$$\forall_{z,z' \in H} \quad d_H(f(z), f(z')) = d_H(z, z').$$

□

4.4.2 MÖBIUSTRANSFORMATIONEN

Ziel: eine explizite Klasse von Bsp. für hom. Isometrien

Definition. Wir schreiben

$$SL(2, \mathbb{R}) := \{ A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$

$$\left(PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R}) / \{ E_2, -E_2 \} \right)$$

Naive Idee: $SL(2,\mathbb{R})$ durch Matrixmult. auf $\mathcal{H}$ op. lassen?

- erstes Problem: $A \in SL(2,\mathbb{R})$, $z \in \mathcal{H}$ $\rightsquigarrow$ $A \cdot z \notin \mathcal{H}$ i.a.
- zweites Problem: i.a. keine Verträglichkeit mit $g_{\mathcal{H}}$ bzw. $d_{\mathcal{H}}$.

Proposition. (Möbiustransformationen). Zu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ def. wir die assoz. **Möbiustransformation**

$$f_A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$z \longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$ gerechnet in $\mathbb{C}$

Dann gilt:

1. Für alle $z \in \mathcal{H}$ ist $c \cdot z + d \neq 0$ und $\operatorname{Im} f_A(z) = \frac{1}{|c \cdot z + d|^2} \cdot \operatorname{Im} z > 0$.
2. Die Abb. f_A ist holomorph und ein glatter Diffeo.
3. Es gilt $f_{E_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} = f_{-E_2}$.
4. Für alle $A, B \in SL(2,\mathbb{R})$ ist $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$.

Beweis 1./3./4.: direkte Rechnungen in $\mathbb{C}$.

2. f_* ist ein glatter Diffeo, denn:

Gruppenop. von $SL(2,\mathbb{R})$ auf $\mathcal{H}$

- f_A ist glatt (FT oder in Real-/Imaginärteil ausschreiben)
- glattes Inverses von f_A: nämlich $f_{A^{-1}}$ nach 3./4. $\square$

$SL(2,\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto z \mapsto \frac{a\cdot z + b}{c\cdot z + d}$

Bsp:

- $\forall\, b \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ Möbiustrafo: $z \longmapsto \frac{1\cdot z + b}{0\cdot z + 1} = z + b$

geometr.: horiz. Verschiebung um b

- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ Möbiustrafo: $z \longmapsto \frac{\lambda\cdot z + 0}{0\cdot z + \frac{1}{\lambda}} = \lambda^2 \cdot z$

geometr.: Skalierung um λ^2

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ Möbiustrafo: $z \mapsto \frac{0 \cdot z + 1}{-z + 0} = -\frac{1}{z}$.

gewehr.: verwandt mit „Inversion am Kreis".

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Proposition. Ist $A \in SL(2,\mathbb{R})$, so ist f_A eine riemannsche Isometrie von $\mathbb{H}^2$.

($\rightsquigarrow f_A \in Isom(\mathbb{H}^2) \subset Isom(H, d_H)$)

($\rightsquigarrow$ injektiver Gruppenhom $PSL(2,\mathbb{R}) \to Isom(H, d_H)$, $[A] \mapsto f_A$)

Beweis: Wissen bereits: f_A ist ein glatter Diffeo $H \to H$.

- zz: Verträglichkeit mit g_H.

Sei $z \in H$. Dann gilt: $f_A : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

(Quot.regel über $\mathbb{C}$)

$T_z f_A : T_z H \longrightarrow T_{f(z)} H$ $\quad \hat{=} \mathbb{R}^2 \hat{=} \mathbb{C}$ $\quad \hat{=} \mathbb{R}^2 \hat{=} \mathbb{C}$

$$v \longmapsto \frac{a\cdot(cz+d)-(az+b)\cdot c}{(cz+d)^2}\cdot v$$

$$= \frac{\overbrace{a\cdot d - bc}^{=\det A = 1}}{(cz+d)^2}\cdot v = \frac{1}{(cz+d)^2}\cdot v.$$

Damit folgt für alle $v, w \in T_z H$:

$$\langle T_z f_A(v), T_z f_A(w)\rangle_{H, f_A(z)} = \left\langle \frac{1}{(cz+d)^2}\cdot v, \frac{1}{(cz+d)^2}\cdot w \right\rangle_{H, f_A(z)}$$

Def g_H

$$= \frac{1}{(\operatorname{Im} f_A(z))^2}\cdot \left\langle \frac{1}{(cz+d)^2}\cdot v, \frac{1}{(cz+d)^2}\cdot w \right\rangle_2 \qquad \frac{1}{(cz+d)^2} \in \mathbb{C}$$

$$= \frac{1}{(\operatorname{Im} f_A(z))^2}\cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(cz+d)^2}\cdot v \cdot \frac{1}{\overline{(cz+d)^2}}\cdot \overline{w}\right)$$

s.o. Prop. $\quad = \frac{|cz+d|^4}{(\operatorname{Im} z)^2}\cdot \frac{1}{|cz+d|^4}\cdot \underbrace{\operatorname{Re}(v\cdot\overline{w})}_{=\langle v, w\rangle_2}$

$$= \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2}\cdot \langle v, w\rangle_2 = \boxed{\langle v, w\rangle_{H,z}}.$$

□

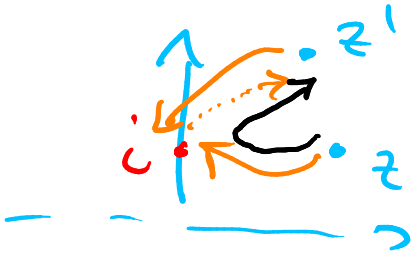
4.4.3 TRANSITIVITÄT DER MÖBIUSTRANSFORMATIONEN

Ziel: . mit Möbiustrafos durch $\mathbb{H}$ bewegen?
→ Transitivität
· auf welche Arten?
→ Stabilisatoren

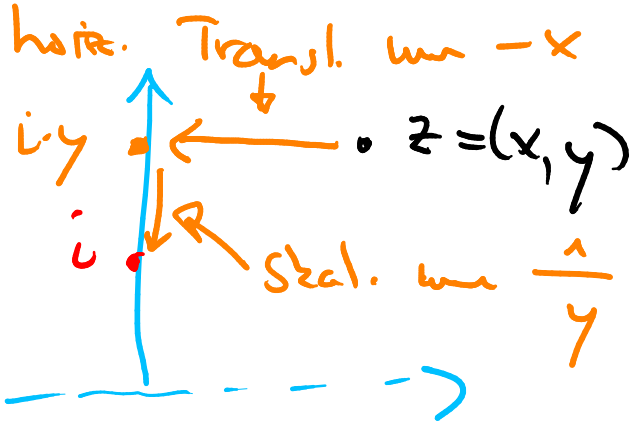
Proposition. (Transitivität I) Für alle $z, z' \in \mathbb{H}$ ex. $A \in SL(2,\mathbb{R})$ mit

$$z' = f_A(z).$$

Beweis. Es genügt den Fall $z' = i$ zu betrachten!



Sei $z \in \mathbb{H}$.



Für

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

gilt $f_A(z) = i$. □