27.04.2021

1.6.2 Das Spiel „SET"

Frage: Gibt es unter 12 Karten immer (*) ein SET?

vier Attribute (mit je 3 Mglkeiten) $\rightsquigarrow 3^4 = 81$ Karten

3 Karten und für jedes Attribut gilt:

- auf allen drei Karten verschieden oder
- auf allen drei Karten gleich.

Idee: als geometr. Problem formulieren!

mithilfe der Mini-Geometrie $A(\mathbb{F}_3^4)$.

Elte aus $\mathbb{F}_3^4$ entsprechen den Karten, wobei die vier Koord. den vier Attributen entsprechen

Beobachtung: Drei Karten bilden genau dann ein SET, wenn die entsprechenden Pkte in $\mathbb{F}_3^4$ eine affine Gerade bilden.

Geraden in $A(\mathbb{F}_3^4)$

(koordinatenweise Bedingungen vergleichen)

(*) ist äquivalent zu: Gibt es unter 12 Pkten in $A(\mathbb{F}_3^4)$ mind. eine (aff.) Gerade?

allg. Frage: Wieviele Plätze braucht man mind. dafür?

Antwort (lineare Algebra...): 21.

1.6.3 STRATEGIE VIA SYMMETRIE

Idee: Manchmal liefern Symmetrien Gewinnstrategien.

Spiel: Godzilla vs King Kong.

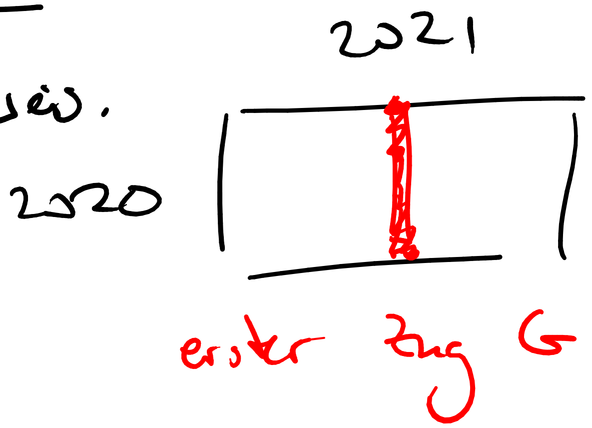
- Spielfeld: 2020×2021 Häuserblocks
- Ein Spielzug: einen zshgdn Bereich von 1 bis 2020 Blocks zerstören

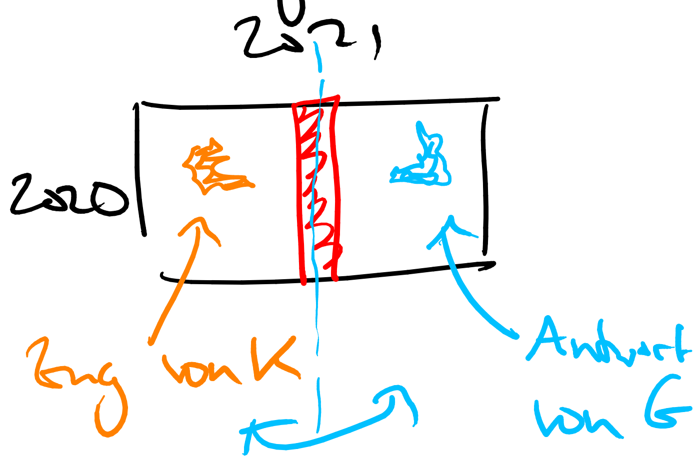
wichtig? ja!

- G und K ziehen abwechselnd
- Derjenige, der zuletzt etwas zerstören kann, gewinnt.
- G beginnt.

__Beh.:__ G besitzt eine Gewinnstrategie.

Beweis.





sauber ausformulieren:

- Spielfeld durch einen geeigneten Graphen modellieren
- Spiegelung als Automorphismus davon.

\+ Induktionsbeweis. $\square$

$\boxed{1.6.4}$ DER HEIRATSSATZ

Ziel: Heiratssatz Klassiker aus der Kombinatorik (zum Nachweis der (Nicht)Ex. von inj. Abb. unter Nebenbed.)
\+ graphenth. Beweis.

Satz (Heiratssatz). Seien F und M endl. Mengen und sei $T : F \to P(M)$ eine Abb.. Dann ex. genau dann eine injektive Abb. $H : F \to M$ mit

Frauen

Männer

Traummänner

Hirt

$$\forall_{f \in F} \quad H(f) \in T(f),$$

wenn T die <u>Heiratsbedingung</u> erfüllt:

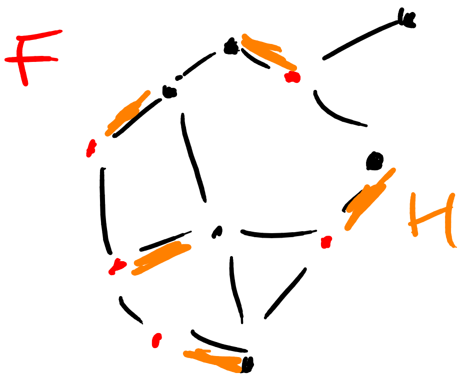
$$\forall_{A \subset F} \quad \left| \bigcup_{f \in A} T(f) \right| \geq |A|.$$

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: schwieriger

Übersetzung in die Graphentheorie:

Definition (Matching). Sei $X = (V, E)$ ein Graph und $F \subset V$. Ein <u>Matching für F in X</u> ist eine Menge $H \subset E$ mit:



- jeder Knoten aus F liegt in einer Kante von H
- $\forall_{e,e' \in H}\ e \neq e' \Rightarrow e \cap e' = \emptyset$.

Heirat $\leftrightarrow$ Matching: In der Situation des Heiratssatzes: Betrachten den Graphen:

$$X := \left(F \sqcup M,\ \{ \{f, m\} \mid m \in T(f) \} \right)$$

Dann: es ex. genau dann eine T-Heirat für F, wenn es in X ein Matching für F gibt.

Also: Heiratssatz folgt aus:

Satz (graphenth. Heiratssatz). Sei $X = (V, E)$ ein endl. Graph und sei $F \subset V$ mit: In X gibt es keine Kanten, die zwei Knoten aus verbinden. Dann: Es ex. genau dann ein Matching für F in X, wenn

$$(*) \quad \forall_{A \subset F}\ |N_X(A)| \geq |A|.$$

Def.: $N_X(A) := \{v \in V \mid \exists_{a \in A} \{a,v\} \in E\}$

„Nachbarn von A in X".

Beweis. $\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Idee: Induktion über $|F|$.

- Induktionsanfang: Ist $|F| \leq 1$, dann: „klar"
- Induktionsvoraussetzung: Sei $|F| \geq 2$ und die Beh. gelte für alle Graphen mit kleinerer „Frauenmenge".
- Induktionsschritt: Dann ist die Heiratsbed. auch für F hinreichend, denn: Fallunterscheidung:

① Es gelte die starke Heiratsbed.

$$\forall_{\substack{A \subset F \\ A \neq \emptyset,\, A \neq F}} \quad |N_X(A)| \geq |A| + 1 . \quad (**)$$

Wir wählen $f \in F$ und $m \in V$ mit $\{f, m\} \in E$.

$\leadsto$ Graphen X': entfernen f, m aus X und alle Kanten, die f oder m enthalten

Wollen IV auf X' anwenden.
und $F' := F \setminus \{f\}$

Müssen überprüfen, ob $\circledast$ für X' und F' erfüllt ist:

Sei $A \subset F' = F \setminus \{f\}$, oBdA $A \neq \emptyset$.

Dann:

$$|N_{X'}(A)| \geq |N_X(A)| - 1 \quad \text{„m"}$$

$$\overset{(**)}{\geqslant} |A| + 1 - 1 = |A|$$

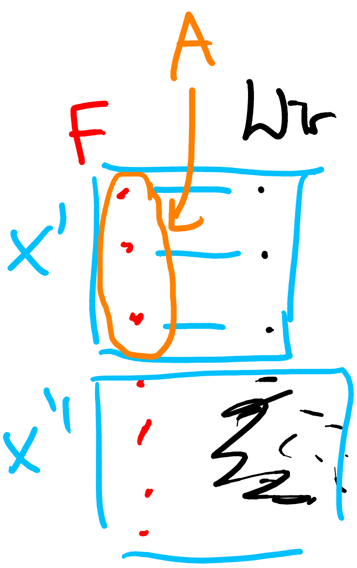
$\rightsquigarrow$ IV auf X' und F' anwendbar

$\rightsquigarrow$ Matching H' von F' in X'.

Dann: $H' \cup \{\{f,m\}\}$ ist ein Matching für F in X.

② Es ex. ein $A \subset F$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq F$ mit

$$|N_X(A)| = |A|. \qquad (***)$$



Wir zerlegen X wie folgt:

$$X' := \left(A \cup N_X(A), \{\{f,m\} \mid f \in A, m \in N_X(A)\}\right)$$

$$X'' := \left(F \setminus A \cup \left(\underbrace{N_X(F \setminus A) \setminus N_X(A)}\right), \{\{f,m\} \mid f \in F \setminus A, m \in \text{''}\}\right).$$

- X' erfüllt $(*)$ (weil $(*)$ für X gilt) mit A
- X'' erfüllt $(*)$: mit $F \setminus A$

Sei $B \subset F \setminus A$. Dann gilt:

$$\boxed{|N_{X''}(B)|} = |N_X(B) \setminus N_X(A)|$$

$$= |N_X(B \cup A) \setminus N_X(A)|$$

$$\geq \underbrace{|N_X(B \cup A)|}_{\geq |B \cup A| \; (*)} - \underbrace{|N_X(A)|}_{= |A| \; (**)}$$

$$\geq |B \cup A| - |A|$$

da $B \cap A = \emptyset$

$$= \boxed{|B|.}$$

$\leadsto$ nach N: • ex. Matching H' für A in X'

• ex. Matching H'' für $F \setminus A$ in X''

$\to$ $H' \cup H''$ ist ein Matching für F in X.

$\square$