Eval: 11.06.2021 28.05.2021

Wdh: $\langle \cdot , \cdot \rangle \rightsquigarrow \| \cdot \| \rightsquigarrow$ Metrik

$\downarrow$

Orthogonalität, Winkel $\leftarrow$ Vorarbeiten...

3.1.3 ORTHOGONALITÄT

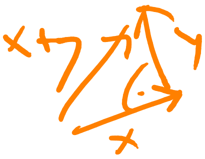
Definition. (orthogonal) Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ein euklid. VR. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen <u>orthogonal</u>, wenn

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

schreiben: $x \perp y$

Bemerkung: Sei $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ein euklid. VR und seien $x, y \in V$ mit $x \perp y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \cdot \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$



„Pythagoras“

Proposition. Es seien 2020 Vektoren in der Ebene gegeben. Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel:

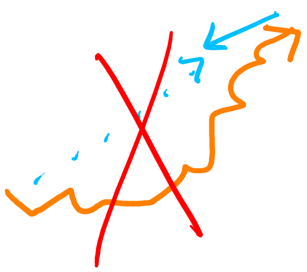
- Ein Zug: Auswahl eines Vektors (steht danach nicht mehr zur Verfügung).

- A und B ziehen abwechselnd
- A beginnt
- Das Spiel endet nach $\frac{2020}{2}$ Runden.
- Es verliert derjenige, dessen Summe die kürzere euklid. Länge hat.

<u>Beh</u>: A besitzt eine Strategie, mit der er nicht verliert.

Beweis.

Idee: Optimierung der Länge in eine geeignete Richtung.



Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und sei $\|\cdot\|$ die induzierte (euklid.) Norm.

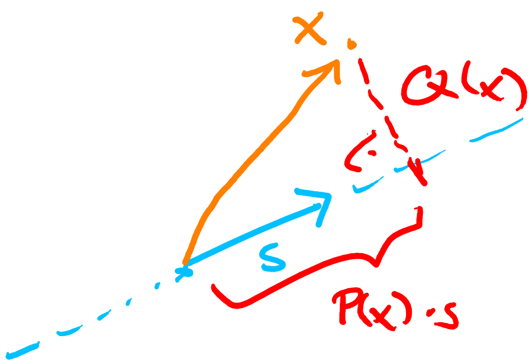
Sei $s \in V$ die Summe aller geg. Vektoren.

Zwei Fälle:

(1) Sei $s \neq 0$.

Sei
$$P : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\langle x, s\rangle}{\|s\|}$$
die Koordinatenabb. zur orth. Proj. $V \longrightarrow \mathbb{R}\cdot s$.

Sei
$$Q : V \to V, \quad x \mapsto x - P(x) \cdot s.$$



Strategie von A: unter den jeweils übrigen Vektoren einen auswählen, der unter P maximal ist.

Beh: damit verliert A nicht!

Beweis. Seien $a_1, \dots, a_{1010}$ die Vektoren von A, $b_1, \dots, b_{1010}$ die von B.

Sei $s_A := \sum_{j=1}^{1010} a_j$, $s_B := \sum_{j=1}^{1010} b_j$.

Zu zeigen: $\|s_A\| \geq \|s_B\|$.

Idee: (I) Abschätzung in s-Richtung
(II) Abschätzung orth. zu s
$\Big\}$ ⟹ ...

(I) Es gilt:

$$\boxed{P(s_A)} = P\Big(\sum_{j=1}^{1010} a_j\Big) \overset{P \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^{1010} \underbrace{P(a_j)}_{\text{Strategie von A} \to\ \geq P(b_j)}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{1010} P(b_j) = P\Big(\sum_{j=1}^{1010} b_j\Big)$$

$$= \boxed{P(s_B)}.$$

$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x \geq y \end{array}\right\} \Rightarrow |x| \geq |y|$

$\underbrace{P(s_A) + P(s_B)} = P(s_A + s_B) = P(s) = 1$

⟹ $\|P(s_A) \cdot s\| \geq \|P(s_B) \cdot s\|$.

(II) Es gilt

$$\boxed{Q(s_A)} = Q(s - s_B) \overset{Q \text{ lin}}{=} \underbrace{Q(s)}_{=0} - Q(s_B)$$

$$= \boxed{-Q(s_B)}$$

Aus (I) und (II) erhalten wir:

$$\boxed{\|s_A\|^2} \overset{\text{Def } Q}{=} \|P(s_A)\cdot s + Q(s_A)\|^2$$

$$\overset{s \perp Q(s_A) \text{ „Pythagoras"}}{=} \underbrace{\|P(s_A)s\|^2}_{\underset{\text{(I)}}{\geq} \|P(s_B)\cdot s\|^2} + \underbrace{\|Q(s_A)\|^2}_{= \|Q(s_B)\|^2}$$

$$\geq \|P(s_B)\cdot s\|^2 + \|Q(s_B)\|^2$$

$$= \|P(s_B)\cdot s + Q(s_B)\|^2$$

$$= \boxed{\|s_B\|^2}.$$

$\rightsquigarrow$ A verliert nicht!

(2) Sei $s = 0$. Dann funktioniert Optimierung in Richtung von z.B. e_1. $\square$

3.2 KURVEN

Idee: betrachten Kurven in ~~endlich~~ normierten $\mathbb{R}$-VR

Ziel: analyt. Beschreibung der Länge gutartiger Kurven, Krümmung, ...

↳ Char. von Geodäten

3.2.1 ANALYTISCHE GRUNDLAGEN

Ziel: differenzierbare Kurven, Ableitungen, ...

Grundkonzepte der Analysis, die dafür nötig sind: Konvergenz, Vollständigkeit.

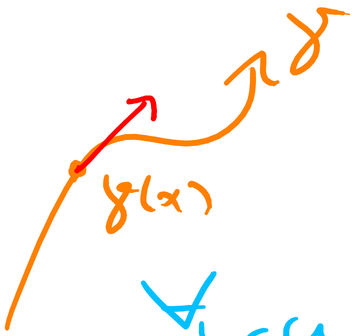
- <u>Banachraum</u>: normierter $\mathbb{R}$-VR, der bzgl. der geg. Norm vollst. ist.
- <u>Hilbertraum</u>: euklid. $\mathbb{R}$-VR, der bzgl. der induzierten Norm ein Banachraum ist.

Definition. (differenzierbar). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $x \in \mathring{I}$. Eine Abb. $\gamma : I \longrightarrow V$ ist <u>in x differenzierbar</u>, wenn es eine $\boxed{\text{lin Abb. } D}: \mathbb{R} \to V$

und eine offene Umgebung $U \subset I$ von 0

und eine Abb. $E: U \to V$ gibt

mit



$$\forall_{h \in U} \quad \gamma(x+h) = \gamma(x) + D(h) + E(h)$$

und

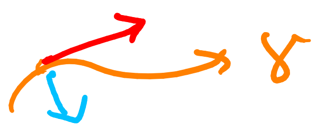
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \cdot E(h) = 0.$$

Falls γ in x diffbar ist, so ist D eindeutig bestimmt (Ableitung von γ in x) und wir schreiben

$$\dot{\gamma}(x) := D(1).$$

Man kann $\dot{\gamma}(x)$ als Differentialquotient beschreiben.

Bemerkung. Interpretation: Sei $\gamma : I \to V$ zweimal diffbar



Bahnkurve

Analysis	Physik	Geometrie
$\dot{\gamma}$	Geschwindigkeit	Richtung
$\ddot{\gamma}$	Beschleunigung	Krümmung

3.2.2 Länge von Kurven

Satz. (Länge von Kurven). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma : [T_0, T_1] \longrightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

Strecke $= \int$ Geschw.

$$L(\gamma) = \int_{T_0}^{T_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt .$$

Beweisskizze.

Idee: HDI anwenden auf

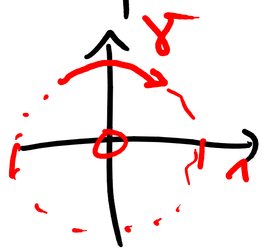
$$f : [T_0, T_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto L\left(\gamma|_{[T_0, t]}\right).$$

zz: f ist diffbar und $f' = \|\dot{\gamma}\|$.

Mehr Details: s. Skript $\square$

Beispiel. Sei $\gamma : \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \left(t, \sqrt{1 - t^2}\right)$$



$\leadsto \gamma$ stetig diffbar in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Dann gilt:

Satz

$$\boxed{L_{(\mathbb{R}^2, d_2)}(\gamma)} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}/2} \| \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{=\left(1,\, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)} \|_2 \, dt$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} \, dt = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$$

$t = \sin x$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos x} \, dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$