29.06.2021

- Übungsleiter: Bewerbungsfrist 02.07.2021
  (Fakultätshomepage!)
- Klausur: rechtzeitig in FlexNow anmelden!
  - keine Hilfsmittel erlaubt
  - Klausureinsicht: 02.08., 9–11
    Anmeldung via GRIPS

Wdh: hyp. Ebene konstruiert. Anschauung ?

Bestimmung der Geodäten/Isometrien

Möbiustransformationen: $SL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright (H, d_H)$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \rightsquigarrow f_A : H \longrightarrow H$

$$z \longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

- Op. ist transitiv. ?

Proposition. (Stabilisator von i). Sei

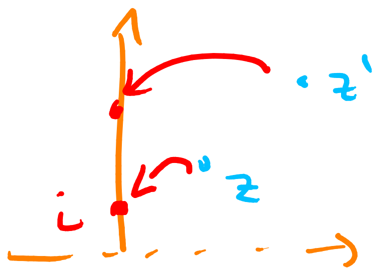
$$Stab_i := \{A \in SL(2,\mathbb{R}) \mid f_A(i) = i\}.$$

Dann gilt $Stab_i = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$

Beweis. Ü 11.3. $\square$

$\left(\rightsquigarrow \quad \mathbb{H} \;\hat{=}\; SL(2,\mathbb{R}) / SO(2) \right.$ Menge der Nebenkl.,
„homogener Raum“ $\left.\right)$

Proposition. (Transitivität II). Seien $z, z' \in \mathbb{H}$ mit $z \neq z'$. Dann ex. ein $A \in SL(2,\mathbb{R})$ mit



$$f_A(z) = i \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(f_A(z')) = 0,$$
$$\operatorname{Im}(f_A(z')) > 1.$$

Beweis. Wegen $\overset{\text{Prop. 4.4.9}}{\text{Transitivität I}}$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $z = i$ ist.

Es genügt also zu zeigen: es ex. ein $A \in \mathrm{Stab}_i$ mit $\operatorname{Re}(f_A(z')) = 0$ und $\operatorname{Im}(f_A(z')) > 1$.

Wir betrachten die stetige Abb

$$R : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \operatorname{Re}\Big(f_{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\in SO(2) = \mathrm{Stab}_i}}(z')\Big).$$

Idee: statt NST auszurechnen: ZWS

Es gilt $\boxed{R(0)} = \operatorname{Re} f_{E_2}(z') = \boxed{\operatorname{Re}(z')}$

$\boxed{R(\tfrac{\pi}{2})} = \operatorname{Re}\big(f_{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}(z')\big) = \operatorname{Re}\big(-\frac{1}{z'}\big) = \boxed{\frac{-1}{|z'|} \cdot \operatorname{Re} z'}$!

Also: $R(0)=0$ oder $R(0)$ und $R(\frac{\pi}{2})$ haben unterschiedliche VZ.

ZWS

$\rightsquigarrow$ es ex. ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $R(\varphi) = 0$.

$\rightsquigarrow$ es ex. $A \in SO(2) = \mathrm{Stab}_i$ mit

$$\mathrm{Re}\,(f_A(z')) = 0.$$

Was ist mit $\mathrm{Im}\,(f_A(z'))$?

- „$=1$": geht nicht, da $z \neq z'$ (...)
- „>1": ✓
- „<1": Sei $B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \in SO(2) = \mathrm{Stab}_i$.

  Dann gilt: Ist $f_A(z') = i \cdot y$, so ist

  $$f_B(z') = \frac{1}{y} \cdot i.$$

  $\rightsquigarrow \mathrm{Im}\,(f_B(z')) > 1.$ $\square$

$\boxed{4.4.4}$ GEODÄTEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Ziel: Charakterisierung aller Geodäten in $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$.

- Ex/Eind. von Geodäten zw. zwei versch. Pkten: Transitivität II und die Beschreibung der vertikalen Geodäten
- allg. geometr. Beschreibg folgt aus: Möbiustrafos bilden „verallg. Halbkreise" auf „verallg. Halbkreise" ab.

$\rightsquigarrow$ Anschauung der Geodäten in (H, d_H)

<u>Satz.</u> (Charakterisierung hyp. Geodäten). Seien $z, z' \in H$ mit $z \neq z'$.

1. Dann gibt es genau eine [glatte] Geodäte in (H, d_H) von z nach z'.
2. Es gibt (bis auf Umparametrisierung in $\mathbb{R}$) genau eine [glatte] geodätische Gerade in (H, d_H), die z und z' enthält.

Genauer: Ist $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{Re}(f_A(z)) = 0 = \mathrm{Re}(f_A(z'))$,

so ist $f_{A^{-1}} \circ (t \mapsto i \cdot e^t)$

eine geod. Gerade, die z und z' enthält.

Beweis. • alle Möbiustrafos sind Isometrien (Prop. 4.4.7)

• Transitivität II $\rightsquigarrow$ oBdA $z = i$

$z' = i \cdot y$

mit $y > 1$

Bew

• Char. der vertikalen Geodäten (Prop. 4.3.10 / Bem. 4.3.11). $\square$

Bem: Daraus folgt auch $(\ast\ast)$ Rechnen!

Sind $z, z' \in H$ mit $z \neq z'$, so gilt

$$d_H(z, z') = \underbrace{\operatorname{arcosh}} \left(1 + \frac{|z - z'|^2}{2 \cdot \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z'} \right)$$

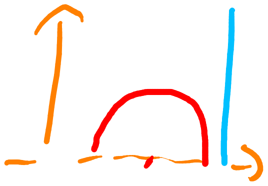
$$\operatorname{arccosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Umkehrfkt zu

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$$
$$x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(i \cdot x)$$

Wie sieht Möbiustrafo (vertikale Geodäte) aus?!

Definition (verallg. Halbkreis). Ein verallgemeinerter Halbkreis ist eine Teilmenge $K \subset H$ mit



- Es ex. ein $m \in \mathbb{R}$ (!) und ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $K = \{ z \in H \mid |z - m| = r \}$.

oder

- Es ex. ein $a \in \mathbb{R}$ mit
$$K = \{ a + i \cdot y \mid y \in \mathbb{R}_{>0} \}.$$

Proposition. (Möbiustrafos und verallg. Halbkreise). Sei $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Dann bildet f_A verallg. Halbkreise auf verallg. Halbkreise ab.

Beweis. Nach Bem. 4.4.6 genügt es, die Beh. für Matrizen der Form

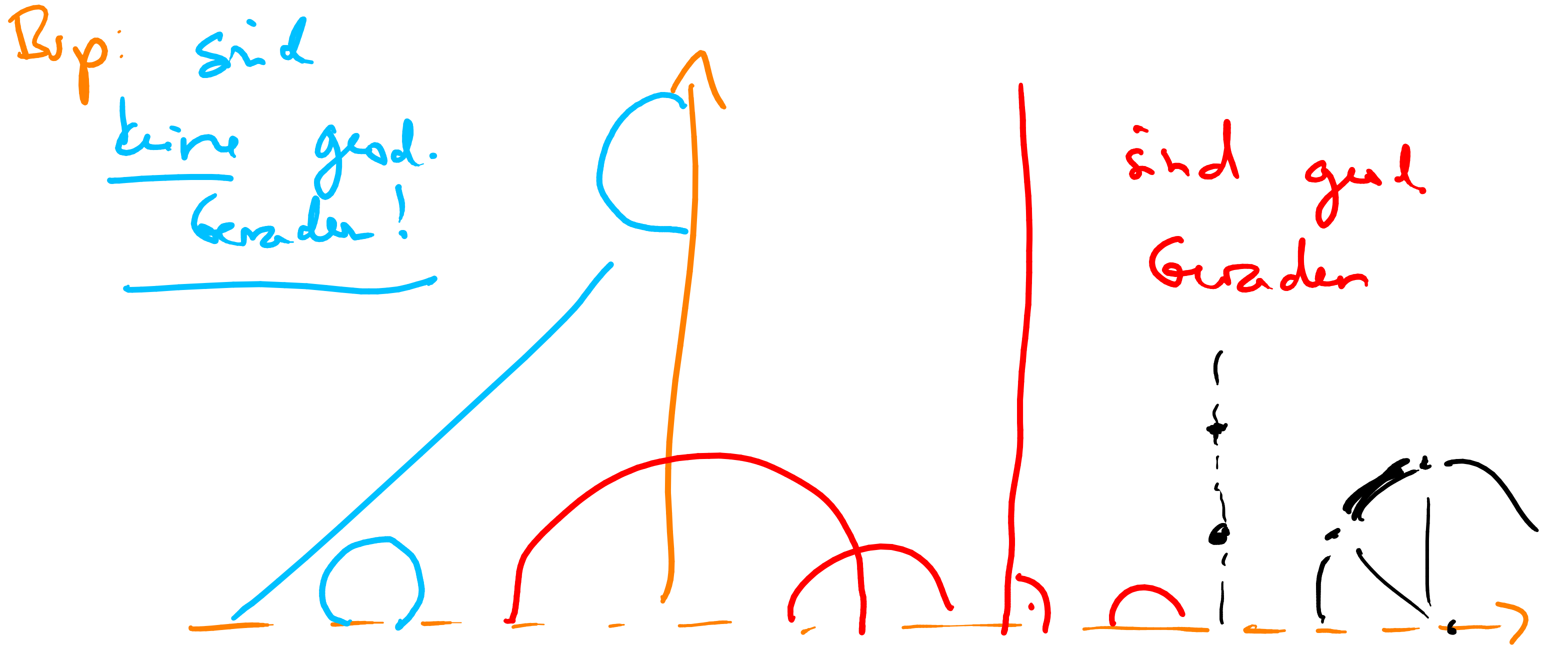
Inv: $\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{MT: horiz. Translation}} \text{ mit } b \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{selbst-invers}}}^{\text{MT: „Inv am Kreis"}}$$

(und ihre Inversen) zu zeigen.

- für $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: klar (horiz. Translation)
- für $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: Ü. $\square$

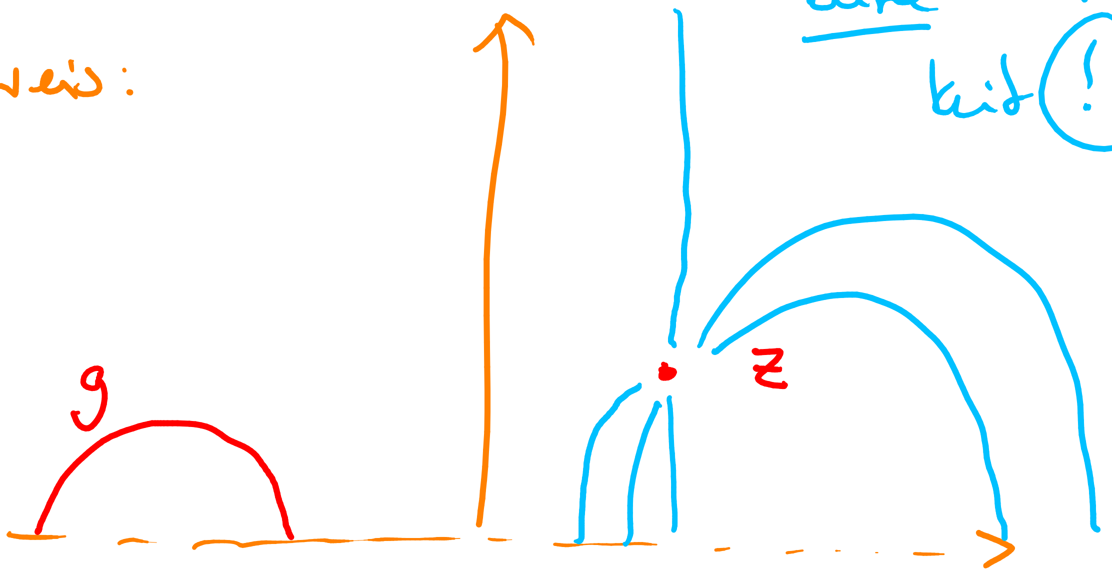
Korollar. [Glatte] Geodäten bzw. [glatte] geod. Geraden in (H, d_H) sind genau die (korrekt parametrisierten) (Segmente von) verallgemeinerten Halbkreisen. $\square$



Bemerkung. (Parallelenaxiom). Die hyp. Ebene erfüllt die folgende Variante des Parallelenaxioms <u>nicht</u>:

Zu jeder geod. Gerade g in (H, d_H) und zu jedem $z \in H$ mit $z \notin g(\mathbb{R})$ ex. genau eine geod. Gerade h in (H, d_H) mit $z \in h(\mathbb{R})$ und $g(\mathbb{R}) \cap h(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Beweis:



keine Eindeutigkeit (!)