30.04.2021

(ii) „begründen" ≙ beweisen

Udh: Heiratssatz: Sei $T: F \to \mathcal{P}(M)$ (F endlich). Dann sind äquivalent:

1. Heiratsbed: $\forall_{A \subseteq F} \left| \bigcup_{f \in A} T(f) \right| \geq |A|$
2. Es ex. eine inj. Abb. $H: F \to M$ mit $\forall_{f \in F} H(f) \in T(f)$.

Korollar. Wir betrachten ein „gerechtes" Kartenspiel mit 52 Karten. Die Karten werden gemischt und auf 13 Stapel zu je vier Karten aufgeteilt.
Dann: Es ist möglich, so aus jedem dieser Stapel eine Karte auszuwählen, dass jeder Wert $2, \ldots, 10, B, D, K, A$ genau einmal auftritt.

Idee: Heiratssatz

- Auswahl der 13 Karten: injektive Abb. Werte $\to$ Stapel.
- Nebenbed: Wert muss in diesem Stapel tatsächlich vorkommen.

Beweis. Wir betrachten:

- $F := \{2, \dots, 10, B, D, K, A\}$ „Werte"
- $M := \{1, \dots, 13\}$ „13 Stapel"
- $T : F \longrightarrow P(M)$

$$f \longmapsto \{m \in M \mid f \text{ liegt im Stapel } m\}$$

Warum ist die Heiratsbed. erfüllt?

Sei $A \subset F$. Wir setzen

$$n := |A| \text{ und } k := \left| \bigcup_{f \in A} T(f) \right|.$$

Zu zeigen ist: $n \leq k$.

Es gilt $4 \cdot n \leq 4 \cdot k$, denn:
Zu jedem $f \in A$ gibt es vier Karten mit dem Wert f. Und alle diese Karten liegen in k Stapeln (die jeweils vier Karten haben).

$\rightsquigarrow 4 \cdot n \leq 4 \cdot k$

$\rightsquigarrow n \leq k$.

$\rightsquigarrow$ die Heiratsbed. ist erfüllt.

Mit dem Heiratssatz folgt: es ex eine inj. Abb. $H : F \to M$ mit

$$\forall_{f \in F} \; H(f) \in T(f).$$

Somit ist H eine Auswahl mit der gew. Eig. □

1.7 Der Eulersche Polyedersatz

(hat auch Anwendungen auf Polyeder!)

Frage: - Welche Graphen lassen sich „überkreuzungsfrei in der Ebene zeichnen"?

- Bzw. welche Gesetzmäßigkeiten erfüllen solche „Zeichnungen"?
- Wozu?? ⇝ nächste Woche

1.7.1 Geometrische Realisierung von Graphen

Ziel: mathemat. Def. von „überkreuzungsfrei in der Ebene zeichnen".

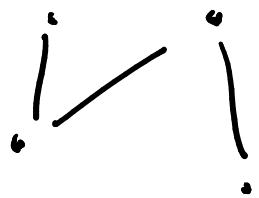
Idee: Graphen: kombinatorische Objekte

? → geometrische Realisierung

topologische Objekte

Grundidee: Knoten ⇝ Punkte ($\mathbb{R}^N$)

Kanten ⇝ Strecken zwischen den Punkten



Definition (geometrische Realisierung). Sei $X = (V, E)$ ein endlicher Graph. Die <u>geometr. Realisierung</u> $X_{\mathbb{R}}$ von X ist der top. Raum

- mit der unterliegenden Grundmenge

$$X_{\mathbb{R}} := \{ e_v \mid v \in V \} \cup \{ \{v,w\}_{\mathbb{R}} \mid \{v,w\} \in E \}$$

$$C \bigoplus_V \mathbb{R} \underset{\mathbb{R}}{\cong} \mathbb{R}^{|V|}$$

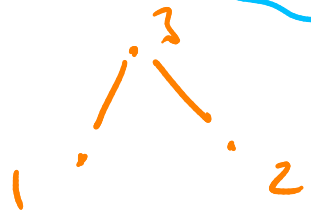
$\{v,w\}_{\mathbb{R}} := \{ t \cdot e_v + (1-t) \cdot e_w \mid t \in [0,1] \}$

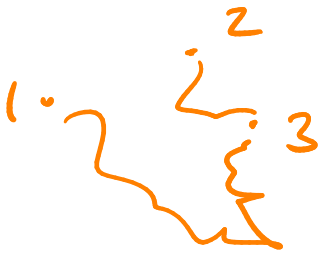
- mit der Teilraumtop. von $\bigoplus_V \mathbb{R}$

(top., die von der euklid. Metrik auf $\bigoplus_V \mathbb{R}$ induziert wird)

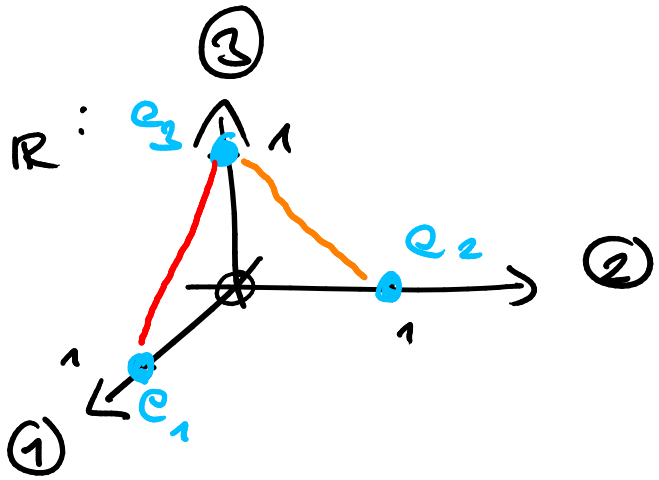
Beispiel. Sei $X := (\{1,2,3\}, \{\{1,3\}, \{2,3\}\})$

schematisch:





$\rightsquigarrow X_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$:



Was passiert mit Morphismen von Graphen?

Proposition. (Funktorialität der geometr. Realisierung).
Seien $X=(V,E)$, $X'=(V',E')$ endl. Graphen und sei $f: X \to X'$ ein Morphismus von Graphen.

1. Dann ist
$$f_{|R}: X_{|R} \longrightarrow X'_{|R}$$
$$\text{für } v \in V: \quad e_v \longmapsto e_{f(v)}$$

$$\text{für } \{v,w\} \in E,\ t \in [0,1]: \quad t \cdot e_v + (1-t) \cdot e_w \mapsto t \cdot e_{f(v)} + (1-t) \cdot e_{f(w)}$$

wohldef. und stetig. ← (Morphismus in der top. Kategorie)

2. Diese Konstruktion ist funktoriell, d.h.
   - $(id_X)_{|R} = id_{X_{|R}}$
   - $(f' \circ f)_{|R} = f'_{|R} \circ f_{|R}$

   für alle Morphismen $f': X' \to X''$ von endl. Graphen.

Beweis. direkt von Hand nachrechnen.

„Abkürzung": $f_{|R}$ ist die Einschränkung

der $\mathbb{R}$-lin. Abb. $F: \bigoplus_V \mathbb{R} \to \bigoplus_{V'} \mathbb{R}$,

die eind. dadurch bestimmt ist, dass

$$\forall_{v \in V} \quad F(e_v) = e_{f(v)}.$$

($(e_v)_{v \in V}$ ist eine Basis von $\bigoplus_V \mathbb{R}$). □

Folgerung: Sind X und X' isomorphe endliche Graphen, so sind $X_{\mathbb{R}}$ und $X'_{\mathbb{R}}$ homöomorph.

Beweis. Da X und X' isomorphe Graphen sind, ex. zueinander inverse Isos

$$f: X \to X' \quad \text{und} \quad f': X' \to X$$

von Graphen. (d.h. $f \circ f' = id_{X'}$, $f' \circ f = id_X$)

Also:

$$f'_{\mathbb{R}} \circ f_{\mathbb{R}} \overset{\text{Prop.}}{=} (f' \circ f)_{\mathbb{R}} = (id_X)_{\mathbb{R}} = id_{X_{\mathbb{R}}}$$

analog $f_{\mathbb{R}} \circ f'_{\mathbb{R}}$. Somit $X_{\mathbb{R}} \overset{\sim}{=}_{\text{Top}} X'_{\mathbb{R}}$.

d.h. es ex. zueinander inverse homöomorphe stetige Abb. $X_{\mathbb{R}} \to X'_{\mathbb{R}}$ und $X'_{\mathbb{R}} \to X_{\mathbb{R}}$:

Kandidat: $f_{\mathbb{R}}$ $f'_{\mathbb{R}}$ □

Definition. (einbettbar, planar). Sei X ein endl. Graph.

- Ist Z ein top. Raum, so nennen wir eine inj. stetige Abb. $X_{|R} \longrightarrow Z$ eine <u>Einbettung</u> von X in Z.
  Falls eine solche ex., heißt X in Z <u>einbettbar</u>.

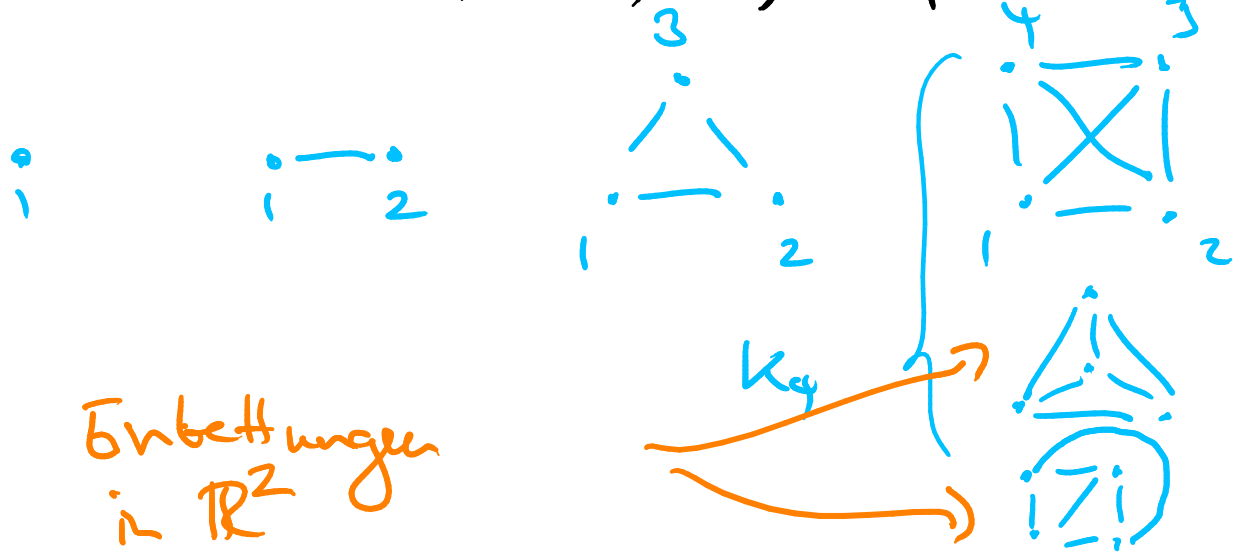
- wichtigster Spezialfall: $Z = \mathbb{R}^2$ mit der Standardtop.
  ⇝ „planare Einbettung", „planar".

Beispiel. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei:

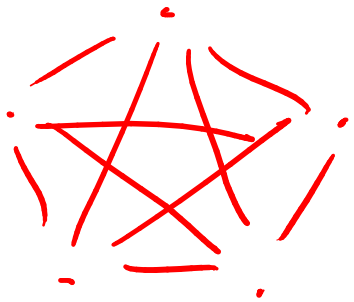
$$K_n := \left(\{1,\dots,n\}, \{\{j,k\} \mid j,k \in \{1,\dots,n\}, j \neq k\}\right)$$

vollst. Graph

Planar sind: K_1, K_2, K_3 K_4



Frage: Ist K_5 planar?



← keine Einbettung in $\mathbb{R}^2$

Wie kann man beweisen, dass K_5 nicht planar ist? (nur anschaulich Polyedersatz).

Bem.
- Ein endl. Graph ist genau dann planar, wenn er in S^2 einbettbar ist.

$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$

- Jeder endl. Graph lässt sich in $\mathbb{R}^3$ einbetten (Ü).