Probeklausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 16. Juli 2021

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)**.** Die Sprache von *Tri-Geometrie* enthält *Punkte*, *Dreiecke* und die Beziehung *„ist Ecke von“* zwischen Punkten und Dreiecken sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Tri-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

T 1 Zu jedem Dreieck gibt es genau drei verschiedene Punkte, die eine Ecke von diesem Dreieck sind.

T 2 Haben zwei Dreiecke dieselben drei Eckpunkte, so stimmen sie überein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Tri-Geometrie: Sind vier verschiedene Punkte gegeben, so gibt es höchstens vier verschiedene Dreiecke, deren Ecken in diesen vier Punkten liegen.

2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Tri-Geometrie ist.

3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Tri-Geometrie-Axiomen?

   Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

   > Sind x, y, z drei verschiedene Punkte, so gibt es ein Dreieck Δ, so dass x, y und z Ecken von Δ sind.

Aufgabe 2 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind Facetten in diesem Kontext definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des eulerschen Polyedersatzes (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung des eulerschen Polyedersatzes.

Aufgabe 3 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

   und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es Punkte $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^2$ mit $d_2(x_j, 0) = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, 4\}$ und

$$d_2(x_1, x_2) + d_2(x_2, x_3) + d_2(x_3, x_4) > 2 \cdot \pi \ ?$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Skizzieren Sie ein reguläres Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ (Achtung: d_1, nicht d_2 !) mit Seitenlänge 2 und begründen Sie kurz, warum es sich um ein reguläres Dreieck bezüglich d_1 handelt.

Aufgabe 4 (4 + 6 = 10 Punkte). Sei $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sei $x \in \mathbb{R}^2$ und es gelte $f^n(x) = x$.

1. Sei $x_0 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f^j(x)$. Was ist $f(x_0)$? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Zeigen Sie, dass die Punkte $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ auf einem gemeinsamen Kreis in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ liegen.

Aufgabe 5 ($2 + 4 + 4 = 10$ Punkte).

1. Wie/Unter welchen Voraussetzungen ist der hyperbolische Winkel zwischen zwei glatten Kurven in der hyperbolischen Ebene definiert?
2. Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H), dessen Innenwinkel alle gleich sind und sei $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi/8$. Welche Innenwinkel hat Δ ?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Kann (H, d_H) mit der Protokachel Δ gepflastert werden?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 ($1 + 1 + 8 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Wie ist die Möbiustransformation zu A auf H definiert?
2. Wie kann man die Möbiustransformation zu $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ geometrisch beschreiben?
3. Formulieren und beweisen Sie die Transitivität der Möbiustransformationsoperation auf H.