Probeklausur zur Geometrie (Lehramt Gymnasium)

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 16. Juli 2021

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	10	10	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)**.** Die Sprache von *Tri-Geometrie* enthält *Punkte*, *Dreiecke* und die Beziehung *„ist Ecke von"* zwischen Punkten und Dreiecken sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Tri-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

T 1 Zu jedem Dreieck gibt es genau drei verschiedene Punkte, die eine Ecke von diesem Dreieck sind.

T 2 Haben zwei Dreiecke dieselben drei Eckpunkte, so stimmen sie überein.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie für Tri-Geometrie: Sind vier verschiedene Punkte gegeben, so gibt es höchstens vier verschiedene Dreiecke, deren Ecken in diesen vier Punkten liegen.
2. Erfinden Sie eine (sinnvolle) Definition dafür, was ein *Modell* für Tri-Geometrie ist.
3. Ist der folgende Satz unabhängig von den Tri-Geometrie-Axiomen?

   Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

   > Sind x, y, z drei verschiedene Punkte, so gibt es ein Dreieck Δ, so dass x, y und z Ecken von Δ sind.

Lösung:

1. Seien x_1, x_2, x_3, x_4 vier verschiedene Punkte. Dann gibt es genau vier Möglichkeiten, daraus drei verschiedene Punkte auszuwählen.

   Da jedes Dreieck nach T 1 genau drei Eckpunkte hat, gibt es also nur vier mögliche Kombinationen von Eckpunkten für Dreiecke.

   Da Dreiecke nach T 2 durch ihre Eckpunkte eindeutig bestimmt sind, gibt es also höchstens vier Dreiecke, deren Eckpunkte zu x_1, x_2, x_3, x_4 gehören.

2. Ein *Modell für Tri-Geometrie* ist ein Tripel $(P, D, \sqsubset)$, bestehend aus einer Menge P, einer Menge D und einer Relation „$\sqsubset$" $\subset P \times D$, mit folgenden Eigenschaften:

- Ist $\Delta \in D$, so gibt es genau drei Elemente $x, y, z \in P$ mit $x \sqsubset \Delta$, $y \sqsubset \Delta$ und $z \sqsubset \Delta$.
- Sind $\Delta_1, \Delta_2 \in D$ und sind $x, y, z \in P$ drei verschiedene Elemente mit $x, y, z \sqsubset \Delta_1$ und $x, y, z \sqsubset \Delta_2$, so gilt bereits $\Delta_1 = \Delta_2$.

Wir fassen dabei die Elemente von P als Punkte auf, die Elemente von D als Dreiecke und die Relation „$\sqsubset$“ als „ist Ecke von“.

[Alternativ könnte man Modelle zum Beispiel auch folgendermaßen definieren: Ein *Modell für Tri-Geometrie* ist ein Paar (P, D), bestehend aus einer Menge P und einer Menge D von drei-elementigen Teilmengen von P. Dabei fassen wir die Elemente von P als Punkte auf und die Elemente von D als Dreiecke auf und modellieren die Beziehung „ist Ecke von“ einfach durch die Elementbeziehung.]

3. Ja, dieser Satz ist unabhängig von den Tri-Geometrie-Axiomen, denn:

    - In dem Modell $(\{0,1,2\}, \emptyset, \emptyset)$ für Tri-Geometrie ist der Satz offenbar *nicht* erfüllt,
    - aber in dem Modell $(\{0,1,2\}, \{\{0,1,2\}\}, \in)$ ist der Satz erfüllt.

Aufgabe 2 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den eulerschen Polyedersatz.
2. Wie sind Facetten in diesem Kontext definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des eulerschen Polyedersatzes (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung des eulerschen Polyedersatzes.

Lösung:

1. Sei $X = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender planarer Graph mit $V \neq \emptyset$ und sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung mit genau F Facetten. Dann gilt
$$|V| - |E| + F = 2.$$
Insbesondere ist die Anzahl der Facetten unabhängig von der gewählten planaren Einbettung.

2. Sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung eines endlichen planaren Graphen X. Die Wegzusammenhangskomponenten des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus f(X_{\mathbb{R}})$ heißen *Facetten der Einbettung f*.

3. Wir beweisen den eulerschen Polyedersatz per Induktion über die Anzahl der Kanten des planaren Graphen.

   Induktionsanfang. Ein zusammenhängender nicht-leerer Graph ohne Kanten besteht nur aus einem einzigen Knoten; solche Graphen sind planar und jede planare Einbettung besitzt offenbar genau eine Facette. Somit ist der eulersche Polyedersatz in diesem Fall erfüllt.

   Induktionsschritt. Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph, der mindestens eine Kante enthält, und der eulersche Polyedersatz sei in allen Fällen mit kleinerer Kantenmenge bereits gezeigt. Sei $f\colon X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Einbettung von X. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

   ① Es gibt einen Knoten $v \in V$ vom Grad 1. In diesem Fall bezeichnen wir die an v angrenzende Kante mit e und betrachten den Graphen
   $$X' := \bigl(V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\}\bigr).$$

Wenden wir den Jordanschen Kurvensatz auf die Facette von f an, in der $f(e_{\mathbb{R}})$ enthalten ist, so folgt mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned} |V| - |E| + F &= |V \setminus \{v\}| + 1 - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\ &= |V \setminus \{v\}| - |E \setminus \{e\}| + F \\ &= 2, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

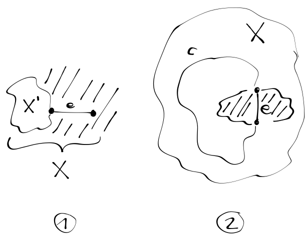
② Es gibt keinen Knoten in X vom Grad 1. Da X mindestens eine Kante enthält, sieht man leicht, dass X mindestens einen Kreis enthält. Sei $e \in E$ eine Kante, die auf einem Kreis c in X liegt. Dann ist auch der Graph

$$X' := \big(V, E \setminus \{e\}\big)$$

zusammenhängend und als Untergraph von X endlich und planar. Wir wenden den Jordanschen Kurvensatz auf die geometrische Realisierung von c an und erhalten mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} |V| - |E| + F &= |V| - |E \setminus \{e\}| - 1 + F \\ &= |V| - |E \setminus \{e\}| + F - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

wie behauptet.



Hinweis. Diese Antwort ist deutlich länger als das, was erwartet wird; sinnvolle Abkürzungen sind natürlich erlaubt!

4. Zum Beispiel folgt aus dem eulerschen Polyedersatz der Sechsfarbensatz.

   Altnerative Möglichkeiten: Nicht-Planarität von K_5 bzw. $K_{3,3}$, Klassifikation platonischer Körper, Satz von Pick, …

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)**.**

1. Berechnen Sie in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ die Länge von
$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin t, \cos t)\end{aligned}$$
und begründen Sie Ihre Rechenschritte.

2. Gibt es Punkte $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^2$ mit $d_2(x_j, 0) = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, 4\}$ und
$$d_2(x_1, x_2) + d_2(x_2, x_3) + d_2(x_3, x_4) > 2 \cdot \pi \text{ ?}$$
Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Skizzieren Sie ein reguläres Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ (Achtung: d_1, nicht d_2 !) mit Seitenlänge 2 und begründen Sie kurz, warum es sich um ein reguläres Dreieck bezüglich d_1 handelt.

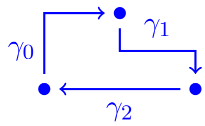
Lösung:

1. Sei γ die gegebene Kurve. Dann ist γ stetig differenzierbar. Mit der analytischen Beschreibung der Länge von Kurven folgt somit, dass
$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt = \int_0^1 \|(\cos t, -\sin t)\|_2 \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1.$$

2. Nein, denn: Seien $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}^2$ mit $d_2(x_j, 0) = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, 4\}$. Für alle $j, k \in \{1, \dots, 4\}$ gilt somit
$$\begin{aligned} d_2(x_j, x_k) &\le d_2(x_j, 0) + d_2(0, x_k) && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &= 1 + 1 && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= 2. \end{aligned}$$
Also ist
$$d_2(x_1, x_2) + d_2(x_2, x_3) + d_2(x_3, x_4) \le 2 + 2 + 2 = 6 < 2 \cdot \pi.$$

3. *Hinweis.* Diese Aufgabe ist etwas komplizierter geraten als ursprünglich intendiert. (Falls so etwas in der tatsächlichen Klausur passieren würde, würde selbstverständlich das Bewertungsschema angepasst.)

   Ein Beispiel für ein reguläres Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ mit Seitenlänge 2 ist (mit den Ecken $(0,0), (2,0), (0,1)$, den Kanten $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ und Mittelpunkt $(1,0)$):



   Als unterliegenden Polygonzug durchläuft man nacheinander γ_0, γ_1 und γ_2.

   Dann sind γ_0, γ_1, γ_2 (mit geeigneter Parametrisierung) bezüglich d_1 geodätisch und haben alle dieselbe Länge 2. Außerdem haben die „Eckpunkte“ $(0,0)$, $(2,0)$ und $(1,1)$ alle denselben Abstand von $(1,0)$, nämlich 1.

   Zudem sind γ_0, γ_1, γ_2 in einem gewissen Sinne maximale Geodäten des entsprechenden Polygonzugs (dies ist die schwierige Bedingung, die bei der Aufgabenstellung übersehen wurde und die im Falle der Metrik d_1 insgesamt nur schwer zu fassen ist); in diesem Fall ist γ_0 maximal; ist γ_0 festgelegt, so ist auch γ_1 maximal; sind γ_0 und γ_1 fesgelegt, so ist auch γ_2 maximal. D.h. die angedeuteten Kanten und Ecken sind tatsächlich die Kanten und Ecken im Sinne der Definition von Polygonen in metrischen Räumen. Außerdem gibt es keine Schnittpunkte im Inneren des Polygonzugs.

Aufgabe 4 (4 + 6 = 10 Punkte)**.** Sei $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sei $x \in \mathbb{R}^2$ und es gelte $f^n(x) = x$.

1. Sei $x_0 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f^j(x)$. Was ist $f(x_0)$? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Zeigen Sie, dass die Punkte $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ auf einem gemeinsamen Kreis in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ liegen.

Lösung:

1. Es gilt $f(x_0) = x_0$, denn: Sei $f_0 := (v \mapsto f(v) - f(0))$. Dann ist $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ und $f_0(0) = 0$. Somit ist f_0 eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Daher erhalten wir

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= f_0(x_0) + f(0) \\
&= f_0\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f^j(x)\right) + f(0) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f_0(f^j(x)) + f(0) && (f_0 \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f(f^j(x)) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f(0) + f(0) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} f^j(x) + f^n(x)\right) - f(0) + f(0) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f^j(x) && (\text{da } f^n(x) = x) \\
&= x_0.
\end{aligned}
$$

2. Die Punkte $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt x_0, denn: Wir zeigen, dass $d_2(f^j(x), x_0) = d_2(x, x_0)$ für alle $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt.

   Da f eine Isometrie ist, erhalten wir mit $f(x_0) = x_0$, dass

$$
\begin{aligned}
d_2\big(x, x_0\big) &= d_2\big(f(x), f(x_0)\big) = d_2\big(f(x), x_0\big) \\
&= d_2\big(f^2(x), x_0\big) && (\text{analog}) \\
&= \cdots && (\text{induktiv}) \\
&= d_2\big(f^{n-1}(x), x_0\big).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte).

1. Wie/Unter welchen Voraussetzungen ist der hyperbolische Winkel zwischen zwei glatten Kurven in der hyperbolischen Ebene definiert?
2. Sei Δ ein geodätisches Dreieck in (H, d_H), dessen Innenwinkel alle gleich sind und sei $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi/8$. Welche Innenwinkel hat Δ ?

   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Kann (H, d_H) mit der Protokachel Δ gepflastert werden?

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Seien $\gamma_1 \colon [0, L_1] \longrightarrow H$ und $\gamma_2 \colon [0, L_2] \longrightarrow H$ glatte Kurven in $\mathbb{H}^2$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\dot\gamma_1(0) \neq 0 \neq \dot\gamma_2(0)$. Dann definieren wir den *hyperbolischen Winkel zwischen* γ_1 *und* γ_2 durch

$$\sphericalangle_H(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle_H\big(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\big) := \arccos \frac{\langle \dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\rangle_{H,\gamma_1(0)}}{\|\dot\gamma_1(0)\|_{H,\gamma_1(0)} \cdot \|\dot\gamma_2(0)\|_{H,\gamma_2(0)}} \in [0, \pi].$$

2. Wir schreiben α für die/den Innenwinkel von Δ. Wegen $\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi/8 > 0$ ist das Bild von Δ nicht in einer gemeinsamen Geodäten enthalten. Mit dem Satz von Gauß-Bonnet für hyperbolische Dreiecke folgt

$$\frac{\pi}{8} = \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \alpha + \alpha),$$

   und damit

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \pi = \frac{7}{24} \cdot \pi.$$

3. Nein, denn: *Angenommen*, es gäbe eine solche Pflasterung. Wir betrachten eine Ecke einer solchen Pflasterung. In einer Ecke treffen dann eine gewisse Anzahl $k \in \mathbb{N}$ von zu Δ kongruenten geodätischen Dreiecken zusammen. Daher ist

$$2 \cdot \pi = k \cdot \alpha = k \cdot \frac{7}{24} \cdot \pi$$

   bzw. $k = 48/7 \notin \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe 6 ($1 + 1 + 8 = 10$ Punkte)**.**

1. Sei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Wie ist die Möbiustransformation zu A auf H definiert?
2. Wie kann man die Möbiustransformation zu $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ geometrisch beschreiben?
3. Formulieren und beweisen Sie die Transitivität der Möbiustransformationsoperation auf H.

Lösung:

1. Zu $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist die assoziierte *Möbiustransformation* wie folgt definiert:
$$\begin{aligned} f_A \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \end{aligned}$$
2. Die Möbiustransformation zu $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist
$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto \frac{-1 \cdot z + 8}{0 \cdot z - 1} = z - 8. \end{aligned}$$
Also handelt es sich bei dieser Translation um horizontale Translation um -8.
3. Für alle $z, z' \in H$ gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit
$$z' = f_A(z),$$
denn:
Es genügt zu zeigen, dass wir von jedem Punkt in H zu i gelangen können, denn: Sind $z, z' \in H$ und sind $A, A' \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $f_A(z) = i = f_{A'}(z')$, so folgt aus den Eigenschaften der Möbiustransformationen, dass $f_{A'^{-1}} = (f_{A'})^{-1}$ und
$$f_{A'^{-1} \cdot A}(z) = f_{A'^{-1}} \circ f_A(z) = (f_{A'})^{-1}(i) = z'.$$

Sei $z \in H$ und sei $x := \mathrm{Re}(z)$, $y := \mathrm{Im}(z)$. Indem wir z horizontal um $-x$ verschieben, erhalten wir einen Punkt auf der imaginären Achse; eine sogenannte diagonale Isometrie mit Faktor $1/\sqrt{y}$ entlang der imaginären Achse bildet diesen Punkt dann auf i ab. Genauer: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f_A(z) = i$.