Geometrie: Woche 10

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 11. Juni 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 15. Juni). Wir setzen die Untersuchung von Regularität/Objekten mit „viel Symmetrie“ fort.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 3.4.4 *Reguläre Polygone.*
- Lesen Sie Kapitel 3.4.5 *Reguläre Polyeder.*
- (Optional) Lesen Sie Anhang A.7 *Das Banach-Tarski-Paradoxon.*

Leseauftrag (für die Vorlesung am 18. Juni). Wir schließen die Untersuchung euklidischer Geometrie mit Pflasterungen der euklidischen Ebene ab und stürzen uns dann in eine etwas exotischere Geometrie: die hyperbolische Geometrie.

- Lesen Sie Kapitel 3.5 *Pflasterungen der euklidischen Ebene.*
- Experimentieren Sie mit Anhang A.8 *Penrose-Puzzle.*
- Lesen Sie Kapitel 4.1 *Was ist riemannsche Geometrie?*

  Es geht nicht darum, dass sie dies im Detail verstehen; Sie sollten aber das unterliegende Grundprinzip nachvollziehen können. Nächste Woche werden wir die hyperbolische Ebene basierend auf diesem Grundprinzip einführen. Für unseren Zugang müssen Sie dabei nicht die technischen Details der Definition von Mannigfaltigkeiten, Tangentialbündeln, ... kennen.

Fingerübung (Symmetriegruppen). Bestimmen Sie die Isometriegruppen diverser Haushaltsgegenstände (bezüglich der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik):

1. Bleistift (rund/dreieckig/sechseckig)
2. Kugelschreiber
3. A4-Papier
4. Teller
5. Tischtennisball
6. Tennisball
7. Steckdose
8. USB-Stecker
9. Pizza-Karton
10. FFP2-Maske

Aufgaben (für die Übungen am 22.–25. Juni). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 9) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 9.1 (Spieglein, Spieglein, Spieglein, ...). Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $a \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

die Translation um a. Im folgenden betrachten wir Spiegelungen an affinen Hyperebenen bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Man kann f in eine Komposition von genau 2020 Spiegelungen zerlegen.
2. Man kann f in eine Komposition von genau 2021 Spiegelungen zerlegen.

   Hinweis. „Determinante!“ sagte die Tante, die alle Invarianten kannte.

Aufgabe 9.2 (Isometrien aus Spiegelungen).

1. Zu $\alpha \in [0, 2 \cdot \pi]$ sei

   $$\begin{aligned} R_\alpha\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass man R_α als Komposition von Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$ (bzgl. des Standardskalarprodukts) schreiben kann. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $\operatorname{Isom}_0(\mathbb{R}^n, d_2)$ als Komposition von endlich vielen Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$ (bzgl. des Standardskalarprodukts) geschrieben werden kann.

   Hinweis. Welche Normalformen/Spektralsätze für orthogonale Matrizen kennen Sie aus der Linearen Algebra?

Aufgabe 9.3 (Kongruenzsätze).

1. Beweisen Sie den Kongruenzsatz WSW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
2. Beweisen Sie den Kongruenzsatz SsW in $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Aufgabe 9.4 (Gleichseitigkeit für alle!). Der imperiale Hofmathematiker Isosceles des Trigon Empire hat die auf der auf der nächsten Seite abgedruckte Arbeit vorgelegt. Was ist schiefgelaufen? Erklären Sie genau, was korrekt ist und was nicht.

Bonusaufgabe (Gruppen aus Molekülen).

1. Welche Symmetriegruppe habe Methanmoleküle? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Welche chemischen Eigenschaften hängen mit der Symmetriegruppe von Molekülen zusammen? Wie? Belegen Sie Ihre Antwort durch geeignete Quellen.

Bonusaufgabe (Gruppen aus der Biologie).

1. Geben Sie Beispiele für Blüten und ihre Isometriegruppen. Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Welche Isometriegruppe haben sphärische Viren zumeist? Geben Sie Beispiele für solche Viren und beschreiben Sie die Isometriegruppe genauer. Belegen Sie Ihre Antwort durch geeignete Quellen.

Abgabe bis spätestens 18. Juni 2021, 8:30, via GRIPS.

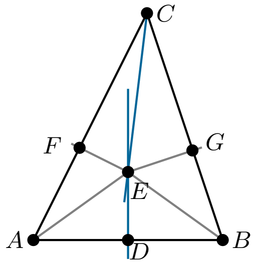
Satz (Großartiger Gleichseitigkeitssatz von Isosceles)**.** Jedes geodätische Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist gleichseitig, d.h.: Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so gilt

$$\|A - B\|_2 = \|B - C\|_2 = \|C - A\|_2.$$

Beweis. *Angenommen,* die drei Seiten wären absurderweise nicht alle gleich lang, ohne Einschränkung etwa $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$.

Sei w die Winkelhalbierende an der Ecke C, d.h. w ist eine Gerade durch C und die Winkel zwischen w und $A - C$ bzw. zwischen w und $B - C$ sind gleich groß. Sei m die Mittelsenkrechte zu A und B, d.h. m ist orthogonal zu $B - A$ und geht durch $D := 1/2 \cdot (A + B)$.

Wegen $\|A - C\|_2 \neq \|B - C\|_2$ haben m und w genau einen Schnittpunkt E. Sei F der Schnittpunkt der zu $A - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch A und C, und sei G der Schnittpunkt der zu $B - C$ orthogonalen Geraden durch E mit der Geraden durch B und C.



Dann erhalten wir die folgenden Beziehungen:

1. Nach Pythagoras ist $\|E - A\|_2 = \|E - B\|_2$, da m zu $B - A$ orthogonal ist und da $\|D - A\|_2 = 1/2 \cdot \|B - A\|_2 = \|D - B\|_2$.
2. Es gilt $\sphericalangle(G - E, C - E) = \sphericalangle(F - E, C - E)$; dies folgt aus der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken sowie der Konstruktion von w als Winkelhalbierende und von F bzw. G als Lotfußpunkte. Mit dem Kongruenzsatz WSW erhalten wir daher

$$\|F - C\|_2 = \|G - C\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|E - F\|_2 = \|E - G\|_2.$$

3. Mit den ersten beiden Schritten und Pythagoras folgt dann außerdem

$$\|A - F\|_2 = \|B - G\|_2.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Der Punkt E liegt innerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen

$$\begin{aligned} \|A - C\|_2 &= \|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= \|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2. \end{aligned}$$

- Der Punkt E liegt außerhalb des von A, B, C aufgespannten Dreiecks. Dann gilt nach den obigen Vorüberlegungen

$$\begin{aligned} \|A - C\|_2 &= -\|A - F\|_2 + \|F - C\|_2 \\ &= -\|B - C\|_2 + \|G - C\|_2 = \|B - C\|_2. \end{aligned}$$

Es folgt also $\|A - C\|_2 = \|B - C\|_2$, im Widerspruch zu unserer grotesken Annahme. ■