Geometrie: Woche 11

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 18. Juni 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 22. Juni)**.** Wir konstruieren das Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene als riemannsche Mannigfaltigkeit und konstruieren die Metrik auf der hyperbolischen Ebene.

- Lesen Sie Kapitel 4.2 *Konstruktion der hyperbolischen Ebene.*
- Lesen Sie Kapitel 4.3 *Länge von Kurven.*

Leseauftrag (für die Vorlesung am 25. Juni)**.** Wir beginnen mit der simultanen Bestimmung der Isometrien und der Geodäten der hyperbolischen Ebene; dies werden wir nächste Woche fortsetzen.

- Lesen Sie Kapitel 4.4.1 *Riemannsche Isometrien.*
- Lesen Sie Kapitel 4.4.2 *Möbiustransformationen.*
- Lesen Sie Kapitel 4.4.3 *Transitivität der Möbiustransformationen* bis Proposition 4.4.10.

Fingerübung (hyperbolische Länge)**.** Ordnen Sie diese Kurven $[0,1] \longrightarrow H \subset \mathbb{C}$ in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ der Länge nach! Skizzieren Sie die Kurven!

1. $t \longmapsto i + t$
2. $t \longmapsto 2021 \cdot i + t$
3. $t \longmapsto i + (1 + i) \cdot t$
4. $t \longmapsto i + t + i \cdot t^2$

Aufgaben (für die Übungen am 29. Juni–2. Juli)**.** Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 10) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 10.1 (Pflasterungen der euklidischen Ebene)**.** Sei K eine endliche Menge von Polygonen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

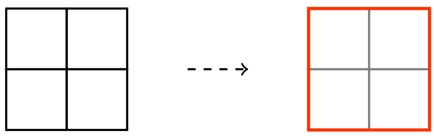
1. Ist P eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protokacheln aus K, so ist P unendlich.

2. Ist P eine Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Protokacheln aus K, so gilt:

$$\forall_{Q \in K} \quad \exists_{g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)} \quad g(Q) \in P.$$

Aufgabe 10.2 (Konstruktion des regulären Fünfecks)**.** Konstruieren Sie aus der Menge $\{(0,0), (1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal ein reguläres Fünfeck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit Radius 1. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie die Durchführbarkeit und Korrektheit der Konstruktion.
Hinweis. Was hat Aufgabe 6.2 mit den Kuchenstückdreiecken eines regulären Fünfecks vom Radius 1 zu tun?

Aufgabe 10.3 (Inflation von Quadraten)**.** Warum kann man mit der Inflation



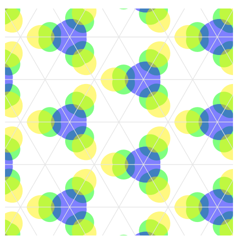
nicht analog zum Beweis für Penrose-Pflasterungen zeigen, dass jede Pflasterung von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ durch kongruente Quadrate aperiodisch ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Bei der beschriebene Inflation bestehen die „neuen" Quadrate je aus 2×2 der „alten" Quadrate.

Aufgabe 10.4 (Kaleidoskop in LaTeX)**.** Vervollständigen Sie die LaTeX-Quelldatei caleidoscope_exercise.tex so, dass Sie einen Kaleidoskop-Bilder-Generator erhalten. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Vervollständigen Sie \caleidohexagon so, dass ein Sechseck aus sechs wie in einem Kaleidoskop gespiegelten Dreiecken entsteht.

2. Vervollständigen Sie dann das Programm durch geeignete Translationen von \caleidohexagon.

Hinweis. Wenn Sie keine eigene LaTeX-Installation haben, können Sie den Quellcode unter https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in LaTeX lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



Bonusaufgabe (alea rotata est)**.** Vervollständigen Sie im OpenSCAD-Programm cube_exercise.scad die Funktion cube_isometries so, dass ein Würfel erzeugt wird. Erklären Sie den mathematischen Hintergrund Ihrer Lösung!
Hinweis. Installation und mehr Informationen: https://openscad.org/ . Man kann auch ohne genauere Kenntnis oder Installation von OpenSCAD ohne Schwierigkeiten erahnen, wie man die Aufgabe lösen kann!
Hinweis. Mit diesem Programm lassen sich 3D-Objekte für den 3D-Druck erstellen ... frohes Experimentieren!

Abgabe bis spätestens 25. Juni 2021, 8:30, via GRIPS.