Geometrie: Woche 12

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 25. Juni 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 29. Juni)**.** Diese Woche vervollständigen wir die Klassifikation der hyperbolischen Geodäten und Isometrien.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 4.4.3 *Transitivität der Möbiustransformationen*.
- Wiederholen Sie das Parallelenaxiom und den Unabhängigkeitsbegriff.
- (Optional) Lesen Sie Anhang A.2 *Hilberts Axiomatik*.
- Lesen Sie Kapitel 4.4.4 *Geodäten der hyperbolischen Ebene*.

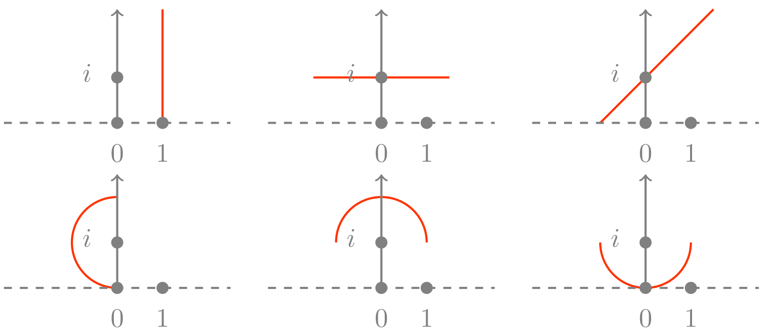
  Insbesondere kommen wir hier auf das Parallelenaxiom zurück!
- Lesen Sie Kapitel 4.4.5 *Winkel* bis Bemerkung 4.4.24.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 2. Juli)**.** Als letztes Hilfsmittel zur Klassifikation führen wir hyperbolische Winkel ein.

- Wiederholen Sie die Definition und Eigenschaften von Winkeln in der euklidischen Geometrie.
- Lesen Sie den Rest von Kapitel 4.4.5 *Winkel*.
- Lesen Sie Kapitel 4.4.6 *Die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene*.
- Lesen Sie Kapitel 4.5.1 *Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet* bis Definition 4.5.1.

Nächste Woche befassen wir uns mit der Winkelsumme in hyperbolischen geodätischen Dreiecken und regulären Pflasterungen der hyperbolischen Ebene.

Fingerübung (hyperbolische Geodäten)**.** Welche der folgenden Bilder im Halbebenenmodell stellen hyperbolische Geodäten dar?



Aufgaben (für die Übungen am 6. Juli–9. Juli)**.** Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 11) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 11.1 (hyperbolische Metrik). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung $z \longmapsto z + i$ ist eine Isometrie von (H, d_H).
2. Es gilt $d_H(i, 1 + 2 \cdot i) = \sqrt{2}$.

   Hinweis. Muss man dazu $d_H(i, 1 + 2 \cdot i)$ exakt berechnen?

Aufgabe 11.2 (hyperbolische Spiegelung). Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\overline{z}, \end{aligned}$$

wobei $\overline{z}$ die komplexe Konjugation von $z \in H \subset \mathbb{C}$ bezeichnet.

1. Veranschaulichen Sie f geeignet. Es gibt hier natürlich viel Spielraum; erklären Sie, warum/wie Ihre Veranschaulichung zur Definition passt!
2. Zeigen Sie, dass f eine riemannsche Isometrie $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ ist.

Aufgabe 11.3 (Stabilisator von i). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Stab}_i = \mathrm{SO}(2)$. Dabei schreiben wir $\mathrm{Stab}_i = \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \mid f_A(i) = i\}$ für den Stabilisator von $i \in H$ bezüglich der Möbiustransformationsoperation.

Aufgabe 11.4 (positive Definitheit der hyperbolischen Metrik). Seien $z, z' \in H$ mit $d_H(z, z') = 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $z = z'$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die triviale Abschätzung für hyperbolische Längen; die vertikale Abschätzung hilft bei Kurven, die zu weit nach oben entfleuchen.

Bonusaufgabe (riemannsche Länge vs. metrische Länge). Seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma \colon [T_0, T_1] \longrightarrow H$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H, d_H)}(\gamma).$$

Hinweis. Die Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ folgt direkt aus der Definition von d_H und der metrischen Länge $L_{(H,d_H)}$.

Die umgekehrte Ungleichung $L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq L_{(H,d_H)}(\gamma)$ erfordert sehr genaue lokale Abschätzungen (zum Beispiel wie im Beweis der Definitheit von d_H), um die Situation in winzigen Umgebungen mit (skalierten) euklidischen Situationen zu vergleichen. Mit der analytischen Beschreibung der metrischen Länge in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kann man dann die gewünschte Ungleichung herleiten.

Bonusaufgabe (hyperbolische Geometrie – so vergisst man sie nie!).

Formulieren Sie ein Gedicht,
das die Konstruktion der hyperbolischen Ebene erklärt;
doch Vorsicht: ohne Reime zählt es nicht
und Punkte bleiben so verwehrt.
Dabei sollte man auch nicht vergessen,
die Länge von Kurven hyperbolisch zu messen;
und wie bei allen metrischen Räumen,
die Definition der Metrik nicht zu versäumen.

Abgabe bis spätestens 2. Juli 2021, 8:30, via GRIPS.