Geometrie: Woche 13

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 2. Juli 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 6. Juli). Wir behandeln den Satz von Gauß-Bonnet, der einen Zusammenhang zwischen Winkelsumme und Flächeninhalt in hyperbolischen Dreiecken herstellt, und seine Anwendungen.

- Wiederholen Sie die Winkelsumme in euklidischen Dreiecken.
- Wiederholen Sie die Transformationsformel für mehrdimensionale Integration.
- Wiederholen Sie die Definition des Flächeninhalts euklidischer Dreiecke.
- Lesen Sie den Rest von Kapitel 4.5.1 *Flächen, Winkel und der Satz von Gauß-Bonnet*.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 9. Juli).

- Wiederholen Sie die Klassifikation regulärer Polygone/Polyeder/Pflasterungen in der euklidischen Geometrie.
- (Optional) Wiederholen Sie die funktionentheoretischen Eigenschaften der Cayley-Transformation.
- Lesen Sie Kapitel 4.5.2 *Reguläre hyperbolische Dreiecke*.
- Lesen Sie Kapitel 4.5.3 *Hyperbolische Dreiecke sind dünn*.

Damit ist unsere Behandlung der hyperbolischen Geometrie abgeschlossen; nächste Woche gehen wir noch kurz auf die sphärische Geometrie ein und vergleichen euklidische, hyperbolische und sphärische Geometrie.

Fingerübung (hyperbolische Dreiecke).

1. Skizzieren Sie ein hyperbolisches geodätisches Dreieck mit „kleiner“ Winkelsumme.
2. Skizzieren Sie ein hyperbolisches geodätisches Dreieck mit „großer“ Winkelsumme.
3. Skizzieren Sie zwei hyperbolische geodätische Dreiecke, die dieselbe Winkelsumme besitzen, aber nicht kongruent sind.
4. Skizzieren Sie zwei kongruente hyperbolische geodätische Dreiecke, so dass die Punkte des einen alle Imaginärteil kleiner als 1 haben und die Punkte des anderen alle Imaginärteil größer als 1 haben.

Aufgaben (für die Übungen am 13. Juli–16. Juli). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 12) besprochen.

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Die folgenden Übungsblätter werden als Bonusblätter gewertet.

Bitte wenden

Aufgabe 12.1 (Möbiustransformationen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $f_A(i/2) = i$ und $f_A(i) = 2 \cdot i$.
2. Es gibt Matrizen $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $f_A(i) = 2021 \cdot i = f_B(i)$ und $A \neq B$.

Aufgabe 12.2 (Inversion am Kreis). Wir betrachten die Abbildung (wobei wir H als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen)

$$\begin{aligned} f \colon H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

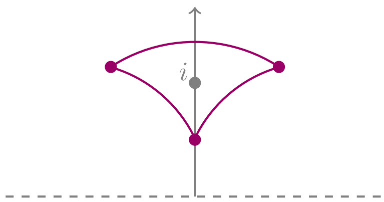
Zeigen Sie: Ist K ein verallgemeinerter Halbkreis, so ist auch $f(K)$ ein verallgemeinerter Halbkreis. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Da dies Teil des Beweises von Proposition 4.4.17 ist, dürfen Sie natürlich Proposition 4.4.17 *nicht* verwenden.

Aufgabe 12.3 (ein hyperbolisches Dreieck). Zeichnen Sie das geodätische Dreieck in (H, d_H) mit den Ecken $1 + i$, $i - 1$, $2 + 2 \cdot i$. Erklären Sie dabei genau, warum Ihre Zeichnung korrekt ist und wie Sie die entscheidenden Komponenten berechnet/konstruiert haben.

Aufgabe 12.4 (reguläre hyperbolische Dreiecke). Sei $f \colon H \longrightarrow H$ die Möbiustransformation zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Zu $y \in (0,1)$ betrachten wir die Punkte $z_0(y) := i \cdot y$ sowie $z_1(y) := f(i \cdot y)$ und $z_2(y) := f^2(i \cdot y)$.



Seien $\alpha_0(y)$, $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$ die entsprechenden Winkel des von $z_0(y), z_1(y), z_2(y)$ aufgespannten geodätischen Dreiecks in (H, d_H).

1. Zeigen Sie, dass $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_H$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $d_H(z_0(y), z_1(y)) = d_H(z_1(y), z_2(y)) = d_H(z_2(y), z_0(y))$.
3. Zeigen Sie, dass $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = \alpha_2(y) > 0$.
4. Skizzieren Sie einen Beweis für $\lim_{y \to 0} \alpha_0(y) = 0$.

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie die wesentlichen Schritte formulieren und mit geeigneten Skizzen illustrieren; Sie müssen die zugehörigen Berechnungen nicht im Detail ausführen.

Bonusaufgabe (Gezwitscher von Gauß-Bonnet).

1. Formulieren Sie den Satz von Gauß-Bonnet als 280-Zeichen-„Tweet“, ohne mathematische Symbole zu verwenden.
2. Fassen Sie den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet in 280 Zeichen zusammen, ohne mathematische Symbole zu verwenden; zusätzlich zu den 280 Zeichen dürfen Sie auch noch ein Bild verwenden (ohne Text oder mathematische Symbole im Bild).

Abgabe bis spätestens 9. Juli 2021, 8:30, via GRIPS.