Geometrie: Woche 14

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 9. Juli 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 13. Juli)**.** Zum Abschluss skizzieren wir kurz wie man analog zur euklidischen und hyperbolischen Geometrie auch sphärische Geometrie behandeln kann.

- Lesen Sie Kapitel 4.6 *Vergleich mit sphärischer Geometrie*.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 16. Juli)**.** Dies ist die letzte Vorlesung. Es ist keine Vorbereitung nötig: Enjoy the ride!

Fingerübung (geographische Koordinaten)**.** Wir nehmen im folgenden an, dass die Erde eine Kugel mit Radius 6370 km ist.

1. Schlagen Sie die geographischen Koordinaten von Regensburg, Tokyo, Port Moresby und Nuuk nach.
2. Was bedeuten diese Koordinaten?
3. Wie weit sind diese Orte vom Südpol entfernt? Vom Nordpol? Vom Äquator?
4. Bestimmen Sie die Entfernung von Regensburg nach Tokyo, Port Moresby und Nuuk.
5. Skizzieren Sie auf einem Globus Geodäten zwischen diesen Orten.
6. Skizzieren Sie in einem Atlas Geodäten zwischen diesen Orten.

Aufgaben. Freiwillige Abgabe bis 16. Juli, 8:30 (via GRIPS). Diese Aufgaben zählen als Bonuspunkte.

Bitte wenden

Aufgabe 13.1 (Dreiecke)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt ein geodätisches Dreieck in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit den Seitenlängen 1, 2, 4.
2. Es gibt ein geodätisches Dreieck in (H, d_H) mit den Seitenlängen 1, 2, 4.

Aufgabe 13.2 (hyperbolisches Flächenwachstum)**.** Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass

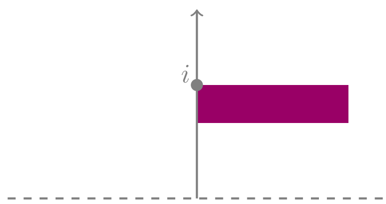
$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(B_i^{(H,d_H)}(r)\bigr) \geq \frac{r}{2} \cdot (e^{r/2} - 1),$$

indem Sie wie folgt vorgehen: Sei $Q_r := \bigl\{x + i \cdot y \bigm| x \in [0, r/2],\ y \in [e^{-r/2}, 1]\bigr\}$.

1. Zeigen Sie, dass $Q_r \subset B_i^{(H,d_H)}(r)$ gilt und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen.

   Hinweis. Warum ist $d_H(i, x+i) \leq r/2$ für alle $x \in [0, r/2]$? Was passiert mit den vertikalen Abständen? Warum hilft das?

2. Zeigen Sie, dass $\mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) = r/2 \cdot (e^{r/2} - 1)$ ist und folgern Sie daraus die Behauptung.



Aufgabe 13.3 (Cirkellimiet III)**.** Betrachten Sie den Holzschnitt *Cirkellimiet III* von M.C. Escher:

https://mcescher.com/wp-content/uploads/2019/05/LW-434.jpg

Falls die abgebildeten Vierecke/Dreiecke jeweils kongruente geodätische reguläre hyperbolische Vierecke bzw. Dreiecke (im Poincaré-Scheibenmodell) sind, können dann die weißen Linien hyperbolische geodätische Geraden sein? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Winkel?!

Aufgabe 13.4 (Isometrien sind flächentreu)**.** Sei $A \subset H$ eine messbare Menge und sei $f \in \operatorname{Isom}(H, d_H)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A)$ messbar ist und, dass

$$\mu_{\mathbb{H}^2}\bigl(f(A)\bigr) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A)$$

gilt.
Hinweis. Falls Sie den Begriff „messbar“ noch nicht kennen, können Sie stattdessen auch „offen“ oder „abgeschlossen“ oder „Jordan-messbar“ oder … verwenden.

Sie können die Aussage zunächst für riemannsche Isometrien beweisen oder mit einem konkreten Erzeugendensystem von $\operatorname{Isom}(H, d_H)$ arbeiten.

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele (Tipp-)Fehler im Skript!

Abgabe bis spätestens 16. Juli 2021, 8:30, via GRIPS.