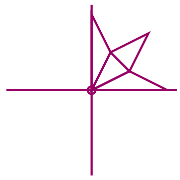
Geometrie: Woche 15

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 16. Juli 2021

Commander Blorx ist derzeit auf wichtiger Mission für die pangalaktisch tätige **Geheim-Polygon-Gruppe (GPG)**. Durch seine Raffinesse ist es ihm gelungen, einen verschlüsselten Auftrag aus dem Paralleluniversum Primar III abzufangen:

> Sei G die von den Spiegelungen an den Hyperebenen durch $(0,0)$ und $(2021,0)$ bzw. durch $(0,0)$ und $(0,2021)$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$. Bestimmen Sie die Orbits der unten abgebildeten Polygone unter der Operation von G auf $\mathbb{R}^2$ durch Evaluation und färben Sie die entstehenden Polygone entsprechend.



Blorx bereist daraufhin auf Kosten der GPG diverse Raumstationen, Planeten, blaue Löcher, ..., um weitere Informationen zu sammeln. Helfen Sie Blorx dabei, Richtiges von Falschinformationen zu trennen und diese Nachricht zu entschlüsseln!

Problem 14.1. Als erstes geht Blorx dem folgenden Gerücht über Mini-Geometrie nach, das er auf einem maroden Raumfrachter aufgeschnappt hat:

> Für alle Punkte x, x', y, z gilt: Sind (x, y, z) und (x', y, z) Dreiecke, so ist auch (x, x', z) ein Dreieck.

Welchen Status hat dieses Gerücht im Kontext der anderen Mini-Geometrie-Axiome?

- KE Immer wahr.
- ME Immer falsch.
- BE Unabhängig.

Problem 14.2. Blorx befragt im Hinterzimmer der berüchtigten Eisdiele Plato Gelato drei Agenten zu den relevanten Zahlen der streng geheimen platonischen Körper. Welche der Aussagen ist wahr?

- ZE Wenn Oktaeder 88 Ecken haben, dann haben Ikosaeder 2020 Seitenflächen.
- DLE Wenn Ikosaeder zwölf Ecken haben, haben Würfel acht Seiten.
- KE Wenn Tetraeder oder Dodekaeder 30 Kanten haben, dann haben Oktaeder acht Ecken.

Problem 14.3. Eine suspekte Gestalt behauptet, dass er einer der allwissenden Mönche vom Planeten Planar sei, und dass er auf einer alten Schriftrolle planare Einbettungen der folgenden Graphen entdeckt habe. Für welchen Graphen ist das sicher nicht wahr?

- LISCH $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/2021, \{[1]\})$
- TISCH $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/2021, \{[2]\})$
- RISCH $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/2021, \mathbb{Z}/2021)$

Bitte wenden

Problem 14.4. Ein zirkulanischer Informant verrät Blorx sein Lieblingsaxiom in metrischen Räumen (X, d):

$$\forall_{x,y\in X} \quad d(x,y) \leq 1 \Longrightarrow S_x^{(X,d)}(1) \cap S_y^{(X,d)}(1) \neq \emptyset.$$

Welchen Status hat dieses Axiom im Vergleich zu den üblichen Axiomen metrischer Räume?

WER Immer wahr.
WÄR Immer falsch.
FÄR Unabhängig.

Problem 14.5. Psssst! Blorx wird zugeflüstert, dass für Vierecke in der euklidischen Ebene der Kongruenzsatz SSSS gelte. Ist das haltbar?

ODER Ja.
UND Nein.

Problem 14.6. Auf Triangular trifft Blorx zwei alte Bekannte, die ihm Geheimnisse über Dreiecke anvertrauen wollen. Der erste behauptet, dass er ein reguläres Dreieck beschaffen kann, dessen Innenwinkel $\alpha \in (0, \pi)$ die Gleichung $\sqrt{3} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$ erfüllt. Wo könnte es ein solches Dreieck geben?

THE In der euklidischen Ebene.
MET In der hyperbolischen Ebene.
BO Auf der Sphäre.

Problem 14.7. Der zweite behauptet, dass er ein reguläres Dreieck anbieten kann, dessen Innenwinkel $\alpha \in (0, \pi)$ die Gleichung $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ erfüllt. Wo könnte es ein solches Dreieck geben?

TER In der euklidischen Ebene.
TEN In der hyperbolischen Ebene.
SEN Auf der Sphäre.

Problem 14.8. Blorx ahnt, dass er demnächst auffliegen wird. Daher bereitet er diverse Fluchtoptionen vor. Welche der folgenden Abbildungen $(\mathbb{R}_{>2021}, d_2) \longrightarrow (H, d_H)$ sind isometrische Einbettungen?

TAN $t \longmapsto i \cdot t$
GÄN $t \longmapsto i \cdot e^t$
WAN $t \longmapsto i \cdot \ln t$

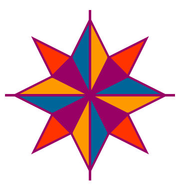
Problem 14.9. Auf der Flucht vor den Hütern des Gesetzes überlegt Blorx, welche Metrik er für seine Fluchtroute $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow H$, $t \longmapsto i + t \cdot (1+i)$ wählen soll. Ist γ bezüglich d_2 oder bezüglich d_h kürzer?

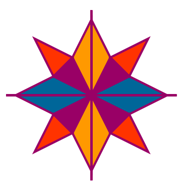
OCH Bezüglich d_2.
ACH Bezüglich d_H.
SACH Egal.

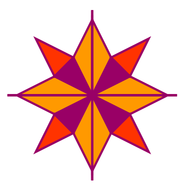
Problem 14.10. Um abzutauchen und seine Identität zu verschleiern, wendet Blorx die Möbiustransformation $f \colon H \longrightarrow H$ zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ an. Bezüglich welcher Metriken ist f isometrisch?

SYM Bezüglich d_1, d_2 und d_H.
SYN Nur bezüglich d_2 und d_H.
HYPER Nur bezüglich d_H.

Problem 14.11. Führen Sie den Auftrag von Primar III aus!


VER


ER


ZER

Lösung.

11	8	2	5	4	1	9	7	10	6	3

Keine Abgabe!