Geometrie: Woche 2

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 20. April 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 20. April). Wir machen nun einen kleinen Exkurs: Wir formalisieren ein Fragment von Mini-Geometrie im Beweisassistenten Lean.

- Lesen Sie Kapitel 1.4 *Formalisierung und Verifikation*.

  Es geht nicht darum, dass Sie hier jedes Detail verstehen; wichtig ist aber, die grundsätzliche Struktur und die enthaltenen mathematischen Schlüsse wiederzuerkennen. Wir werden in der Vorlesung ausführlich über diese Implementierung sprechen.

- (Optional) Lesen Sie Anhang A.3 *Eine viel zu kurze Einführung in* Lean.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 23. April).

- Lesen Sie Kapitel 1.5 *Symmetrie*.
- (Optional) Lesen Sie Anhang A.4 *Kategorien*.
- Lesen Sie Kapitel 1.6.1 *Ramsey-Zahlen*.

In den nächsten Vorlesungen werden wir weitere Anwendungen der Mini-Geometrie bzw. Graphentheorie betrachten.

Fingerübung (Formelsalat).

1. Wie kann man die Schnittpunkteigenschaft in Formeln in einem Mini-Geometrie-Modell $(P, G, \sqsubset)$ schreiben?
2. Wie kann man die Parallelitätseigenschaft in Formeln in einem Mini-Geometrie-Modell $(P, G, \sqsubset)$ schreiben?
3. Wie kann man folgende Formel in einem Mini-Geometrie-Modell $(P, G, \sqsubset)$ kurz in Worten schreiben?

$$\exists_{g \in G} \quad \forall_{h \in G} \quad g = h$$

4. Wie kann man folgende Formel in einem Mini-Geometrie-Modell $(P, G, \sqsubset)$ kurz in Worten schreiben?

$$\exists_{x \in G} \quad \forall_{g \in G} \quad x \sqsubset g$$

Aufgaben (für die Übungen am April 27–30). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 1) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 1.1 (Graphen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Ist (V, E) ein Graph, so gilt:

$$\forall_{v \in V} \quad \exists_{e \in E} \quad v \in e$$

2. Ist (V, E) ein Graph, so gilt:

$$|V| = 2021 \Longrightarrow |E| \leq 20212021$$

Aufgabe 1.2 (Unabhängigkeit). Ein *Viereck* in Mini-Geometrie ist ein Quadrupel (u, v, w, x) von Punkten, wobei die Punkte u, v, die Punkte v, w, die Punkte w, x und die Punkte x, u je auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ein Viereck ist *nicht-entartet*, wenn alle vier Eckpunkte verschieden sind. Welche der folgenden Sätze in Mini-Geometrie sind unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Sind (u, v, w) und (u, w, z) Dreiecke in Mini-Geometrie, so ist (u, v, w, z) ein Viereck in Mini-Geometrie.

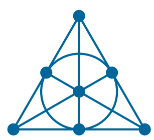
2. Ist (u, v, w, x) ein nicht-entartetes Viereck in Mini-Geometrie, so ist die eindeutige Gerade durch u und v parallel zu der eindeutigen Gerade, auf der die Punkte w und x liegen.

Aufgabe 1.3 (Die Fano-Ebene). Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $P(K)$ tatsächlich ein Modell für Mini-Geometrie ist.

2. Sei K ein endlicher Körper. Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte und Geraden in der Mini-Geometrie $P(K)$.

3. Wie kann man untenstehendes Bild als Skizze von $P(\mathbb{F}_2)$ verstehen? Beschriften Sie insbesondere alle Punkte und Geraden geeignet!



Aufgabe 1.4 (Übungsaufgaben). Eine Gruppe von 17 Studenten bearbeitet drei Übungsaufgaben. Je zwei Studenten diskutieren eine dieser drei Aufgaben miteinander. Zeigen Sie, dass es dann drei Studenten und eine Aufgabe A gibt, so dass je zwei dieser drei Studenten über A diskutiert haben.
Hinweis. Verwenden Sie ein geeignetes Schubfachargument und Mini-Ramsey.

Bonusaufgabe (Schulbuch-Geraden).

1. Extrahieren Sie aus einem Mathematik-Schulbuch Ihrer Wahl eine „Definition“ des Begriffes „Gerade“.

   Hinweis. Wie bei jedem Zitat ist eine Quellenangabe erforderlich!

2. Handelt es sich dabei eher um einen axiomatische oder eher um eine konkrete Definition?

3. Welchen Präzisionsgrad messen Sie dieser „Definition“ bei?

4. Welche kritischen Fragen könnte ein Schüler dazu stellen?

Abgabe bis spätestens 23. April, 8:30, via GRIPS.