Geometrie: Woche 4

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 30. April 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 4. Mai). Wir formulieren und beweisen den eulerschen Polyedersatz; außerdem lernen wir erste Anwendungen dieses Satzes kennen.

- Wiederholen Sie die Begriffe *wegzusammenhängend* und *Wegzusammenhangskomponente*.
- Lesen Sie Kapitel 1.7.2 *Der eulersche Polyedersatz*.
- Lesen Sie Kapitel 1.7.3 *Anwendung: Färbungen und Nicht-Planarität*.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 7. Mai). Nach der Mini-Geometrie betrachten wir nun einen konkreteren Zugang zur Geometrie, nämlich die metrische Geometrie. Zunächst wiederholen wir einfache Grundbegriffe und Beispiele.

- Lesen Sie Kapitel 2.1 *Metrische Räume*.
- Wozu haben Sie metrische Räume bisher im Studium verwendet?

Fingerübung (Färbung von Landkarten).

1. Wieviele Knoten hat der duale Graph zur Deutschlandkarte (aufgeteilt in Bundesländer)?
2. Wieviele Kanten hat dieser Graph?
3. Wieviele Farben benötigen Sie, um eine Deutschlandkarte, aufgeteilt in Bundesländer, zu färben?
4. Wieviel Farben benötigen Sie, um eine Karte von Bayern, aufgeteilt in Land-/Stadtkreise, zu färben?

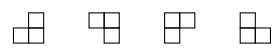
Aufgaben (für die Übungen am 11.–14. Mai). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 3) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 3.1 (Einbettbarkeit)**.** Sei X der Graph $(\{0,1,2\},\{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (nicht nur anschaulich, sondern mit geeigneten Sätzen/Konstruktionen)!

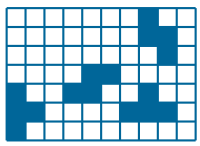
1. Der Graph X ist in $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ einbettbar.
2. Der Graph X ist in $\mathbb{R}$ einbettbar.

Aufgabe 3.2 (L-Tromino-Spiel)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf einem 2021×2021-Schachbrett, bei dem das zentrale Feld (also das 1011-te Feld in der 1011-ten Zeile) fehlt:

- Zu Beginn ist das Spielbrett leer.
- Ein Zug besteht darin, einen Stein der Form  (sog. *L-Tromino*) so auf drei Schachbrett-Felder zu setzen, dass er sich mit keinem anderen Stein überlappt; der Stein darf dabei auch gedreht werden: 
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der den letzten Stein setzen kann, gewinnt.
- Spieler A beginnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt.
Hinweis. Verwenden Sie eine geeignete Symmetrie!

Aufgabe 3.3 (Zug für Zug)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf dem untenstehenden Spielbrett:



- Spieler A beginnt und setzt eine Spielfigur auf ein freies (d.h. weißes) Feld seiner Wahl. Danach macht Spieler B den ersten normalen Zug.
- Ein Zug besteht darin, diese Figur auf ein horizontal oder vertikal benachbartes Feld zu setzen, das die Figur bisher noch *nicht* besucht hat. Insbesondere ziehen beide Spieler mit derselben Figur!
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Derjenige, der den letzten Zug machen kann, gewinnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Modellieren Sie das Spielbrett durch einen geeigneten Graphen und geben Sie ein perfektes Matching für diesen Graphen an (Skizzen genügen).
2. Erklären Sie, warum/wie dies zu einer Gewinnstrategie für Spieler B führt.

Aufgabe 3.4 (SET)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Wieviele Geraden gibt es in der Mini-Geometrie $A(\mathbb{F}_3^4)$?
2. In wievielen SETs ist Ihre Lieblings-SET-Karte enthalten?

Hinweis. Nutzen Sie geeignete Symmetrien und zählen Sie nichts mehrfach.

Bonusaufgabe (Mathematik-Wettbewerbe)**.**

1. Wieviele Runden gibt es beim *Bundeswettbewerb Mathematik*? Wie laufen diese ab? Zu welchem Zeitpunkt sollten Lehrer ihre Klassen darüber informieren?
2. Welche Mathematik-Wettbewerbe für Schüler gibt es in Bayern?

Abgabe bis spätestens 7. Mai, 8:30, via GRIPS.