Geometrie: Woche 5

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 7. Mai 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 11. Mai)**.** Wir führen „Geraden“ in metrischer Geometrie ein und betrachten die Länge von Kurven in metrischen Räumen.

- (Optional) Werfen Sie einen Blick auf die (sehr spärliche) Implementierung metrischer Räume in Lean: metricspace.lean (S. C.10ff).
- Lesen Sie Kapitel 2.2 *Geodäten*.
- Lesen Sie Kapitel 2.3 *Länge von Kurven* bis Proposition 2.3.3.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 14. Mai)**.** In metrischen Räumen können Sphären etc. definiert werden. Insbesondere erhalten wir so einen Kreisbegriff in der euklidischen Ebene. Wir gelangen so zu einem zentralen Thema der Schulgeometrie: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 2.3.
- Lesen Sie Kapitel 2.4.1 *Kreise, Sphären, Bälle*.
- Lesen Sie Kapitel 2.4.2 *Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal* bis Bemerkung 2.4.8.

Nächste Woche werden wir uns weiter mit Konstruierbarkeit befassen sowie mit Symmetrie in metrischen Räumen und dem Extremalprinzip.

Fingerübung (Geodäten in der Ebene)**.** Welche der folgenden Abbildungen sind Geodäten in den jeweiligen metrischen Räumen?

1. $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto t \cdot (1,1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$
2. $[0,\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto t \cdot (1,1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$
3. $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \sqrt{2} \cdot t \cdot (1,1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$
4. $[0,\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto 1/\sqrt{2} \cdot t \cdot (1,1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$
5. $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto t \cdot (1,1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_1)$
6. $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto t \cdot (1,1)$ in $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

Aufgaben (für die Übungen am 18.–21. Mai)**.** Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 4) besprochen.

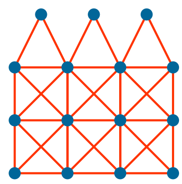
Bitte wenden

Aufgabe 4.1 (Isometrien der Ebene)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Es gilt $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2) = \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_1)$.
2. Es gilt $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2) = \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

Hinweis. Welche Isometrien von $(\mathbb{R}^2, d_2)$ kennen Sie?

Aufgabe 4.2 (die Villa des Nikolaus)**.** Die untenstehenden Skizze eines Graphen spezifiziert, wieviele Knoten es gibt und welche Knoten durch Kanten verbunden sind. Ist dieser Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort!



Hinweis. Man kann die Lösung „sehen“! (Und dann formal begründen ...)

Aufgabe 4.3 (Sechsfarbensatz)**.** Beweisen Sie den Sechsfarbensatz: Für jeden endlichen (zusammenhängenden) planaren Graphen (V, E) gibt es eine Abbildung $c\colon V \longrightarrow \{1, \dots, 6\}$ mit

$$\forall_{\{v,w\} \in E} \quad c(v) \neq c(w).$$

Hinweis. Behandeln Sie induktiv Knoten von niedrigem Grad.

Aufgabe 4.4 (Quintrix)**.** König Quintrix herrscht über ein Reich, bestehend aus fünf zusammenhängenden Provinzen, wobei je zwei dieser Provinzen eine gemeinsame Grenze positiver Länge besitzen. Begründen Sie Ihre Antworten!

1. Könnte sich ein solches Reich auf der Oberfläche eines kugelförmigen Planeten befinden? Oder auf einer Scheibe?
2. Könnte sich ein solches Reich auf der Oberfläche eine Torus-Planeten befinden?

Hinweis. Den Torus erhält man durch folgende Verklebung der Seiten eines Quadrats; es kann hilfreich sein, Skizzen in dieser Quadratansicht zu erstellen.

Bonusaufgabe (Einbettbarkeit in $\mathbb{R}^3$)**.** Zeigen Sie, dass jeder endliche Graph in $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden kann, indem Sie wie folgt vorgehen: Sei

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

die sogenannte *Momentenkurve*.

1. Skizzieren Sie die Momentenkurve in $\mathbb{R}^3$.
2. Seien $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$ und sei $M(t_1, \dots, t_4) := ({t_j}^{k-1})_{j,k \in \{1,\dots,4\}}$ (eine reelle 4×4-Matrix). Zeigen Sie: Sind die vier Zahlen $t_1, \dots, t_4$ alle verschieden, so ist $\det M(t_1, \dots, t_4) \neq 0$.
3. Schließen Sie daraus: Sind $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$ vier verschiedene Zahlen, so liegen die Punkte $\mu(t_1), \dots, \mu(t_4)$ *nicht* in einer gemeinsamen Ebene in $\mathbb{R}^3$.
4. Folgern Sie: Indem man die Knoten auf die Momentenkurve abbildet und diese Punkte dann durch den Kanten entsprechenden Strecken verbindet, erhält man für jeden endlichen Graphen eine Einbettung nach $\mathbb{R}^3$.

Abgabe bis spätestens 14. Mai 2021, 8:30, via GRIPS.