Geometrie: Woche 6

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 14. Mai 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 18. Mai)**.** Wir befassen uns detailliert mit einem Beispiel eines Konstruktionsproblems und beweisen ein Starrheitsresultat für euklidische Symmetrien.

- Lesen Sie den Rest von Kapitel 2.4.2 *Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal*.
- (Optional, wenn Sie bereits die Vorlesung Algebra gehört haben) Wiederholen Sie den Hauptsatz der Galoistheorie und den Zusammenhang zwischen Galoistheorie und Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.
- Lesen Sie Kapitel 2.5 *Symmetrie*.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 21. Mai)**.** Ein wichtige Lösungsmethode ist das Extremalprinzip; insbesondere bei geometrischen Problemen ist es häufig einsetzbar. Nach der metrischen Geometrie spezialisieren wir uns auf die euklidische Geometrie und nehmen dazu das Skalarprodukt systematisch zur Hilfe.

- Lesen Sie Kapitel 2.6 *Das Extremalprinzip*.
- Wiederholen Sie die Begriffe *Norm* und *Skalarprodukt*.
- Lesen Sie Kapitel 3.1.1 *Normierte Räume*.
- Lesen Sie Kapitel 3.1.2 *Skalarprodukte*.

Nächste Woche werden wir uns mit Orthogonalität und dem analytischen Zugang zur Länge von Kurven beschäftigen.

Fingerübung (Konstruierbarkeit)**.** Sei $M := \{(0,0),(1,0)\}$. Wie kann man die folgenden Konstruktionsprobleme mit Zirkel und Lineal, ausgehend von M, lösen? Warum sind die Konstruktionen durchführbar und warum liefern sie das korrekte Ergebnis?

1. Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1.
2. Konstruktion einer Raute mit Seitenlänge 1.
3. Konstruktion von $(1/2, \sqrt{3})$.
4. Konstruktion von $(0,1)$.
5. Konstruktion von $(1/4,0)$.
6. Konstruktion von $(1/3,0)$.

   Hinweis. Diese Konstruktion benötigt eine Tatsache, die Sie vielleicht schon sehr lange nicht mehr in dieser Form verwendet haben.

Aufgaben (für die Übungen am 25.–28. Mai)**.** Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 5) besprochen. Der 25. Mai ist Pfingstdienstag (vorlesungsfrei); Details werden vom Übungsleiter bekanntgegeben.

Bitte wenden

Aufgabe 5.1 (Kollisionsabfrage)**.** Ein typisches Problem bei der Implementierung von Computerspielen ist, zu entscheiden, ob sich zwei Objekte (z.B. der Spielercharakter und giftige Brühe) überschneiden oder nicht. Wir betrachten zwei quadratische Objekte. Seien $x, x' \in \mathbb{R}^2$ und

$$Q := [x_1 - 1, x_1 + 1] \times [x_2 - 1, x_2 + 1],\ Q' := [x_1' - 1, x_1' + 1] \times [x_2' - 1, x_2' + 1] \subset \mathbb{R}^2.$$

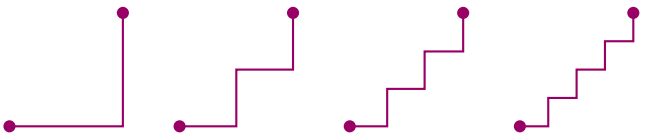
Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Es gilt $Q \cap Q' \neq \emptyset$, wenn $d_2(x, x') \leq \sqrt{2} \cdot 2$.
2. Es gilt $Q \cap Q' \neq \emptyset$, wenn $d_\infty(x, x') \leq 2$.

Aufgabe 5.2 (Mindestabstand)**.** Zeigen Sie: In einem quadratischen Raum mit Seitenlänge 2 m können sich *nicht* fünf Personen gleichzeitig aufhalten, die alle voneinander den Mindestabstand von 1.5 m einhalten.
Hinweis. Die Personen halten sich auf dem (ebenen) Boden auf. Wenden Sie das Schubfachprinzip auf geeignete vier Schubladen an! Vergessen Sie nicht, die „offensichtlichen“ Dinge auch zu beweisen.

Aufgabe 5.3 (Lochebene)**.** Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ *nicht* geodätisch ist!
Hinweis. Achten Sie darauf, dass Ihr Argument nicht nur anschaulich plausibel, sondern wirklich wasserdicht ist. Setzen Sie einen Widerspruchsbeweis an und überlegen Sie sorgfältig, wie man Information zwischen $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ hin- und herschieben kann.

Aufgabe 5.4 ($\sqrt{2} = 2$?!)**.** Was ist falsch am „Beweis“ in Beispiel 2.3.6? Erklären Sie genau, worin der Fehler besteht und welche Schritte korrekt sind.



Bonusaufgabe (Alpha-Max-Beta-Min)**.**

1. Was ist das Alpha-Max-Beta-Min-Verfahren?
2. Wozu/Warum wird es verwendet?

Abgabe bis spätestens 21. Mai 2021, 8:30, via GRIPS.