

Geometrie: Woche 7

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel

21. Mai 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 25. Mai).

- Vorlesungsfrei!
- Falls Sie Langeweile haben und schon alle anderen Literaturhinweise verschlungen haben:

<https://www.youtube.com/watch?v=87uo2TPrl8>

Leseauftrag (für die Vorlesung am 28. Mai). Wir erinnern kurz an Orthogonalität. Danach beginnen wir mit einer etwas analytischeren Betrachtung von Kurven.

- Lesen Sie Kapitel 3.1.3 *Orthogonalität*.
- Lesen Sie Kapitel 3.2.1 *Analytische Grundlagen*.
- Lesen Sie Kapitel 3.2.2 *Länge von Kurven*.

Nächste Woche werden wir noch mehr über Kurven erfahren und uns mit Winkeln auseinandersetzen.

Fingerübung (Länge von Kurven). Bestimmen Sie die Längen der folgenden Kurven in (\mathbb{R}^2, d_2) analytisch:

1. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1, 0)$
2. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0)$
3. $[0, 2021] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0)$
4. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, 0)$
5. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$
6. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^2)$

Aufgaben (für die Übungen am 1.–4. Juni). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 6) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 6.1 (Taxi-Kongruenzsätze). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. In (\mathbb{R}^2, d_1) sind Sphären von gleichem Radius kongruent: Ist $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sind $x, x' \in \mathbb{R}^2$, so sind die Sphären $S_x^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$ und $S_{x'}^{(\mathbb{R}^2, d_1)}(r)$ in (\mathbb{R}^2, d_1) kongruent.
2. In (\mathbb{R}^2, d_1) gilt der Kongruenzsatz SSS: Sind $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ und $(\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2)$ geodätische Dreiecke in (\mathbb{R}^2, d_1) und gilt

$$L(\gamma_0) = L(\gamma'_0), \quad L(\gamma_1) = L(\gamma'_1), \quad L(\gamma_2) = L(\gamma'_2),$$

so sind die die Mengen im $\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ und im $\gamma'_0 \cup \gamma'_1 \cup \gamma'_2$ in (\mathbb{R}^2, d_1) kongruent.

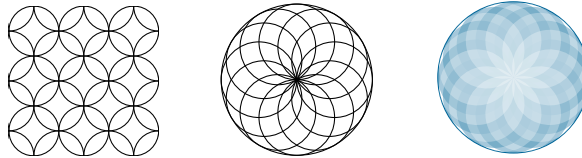
Aufgabe 6.2 (goldenes Schnittchen). Konstruieren Sie in (\mathbb{R}^2, d_2) zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit

$$d_2(x, y) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$. Beschreiben Sie die Konstruktion und beweisen Sie Durchführbarkeit und Korrektheit.

Aufgabe 6.3 (Kreise in L^AT_EX).

1. Vervollständigen Sie `circles_exercise.tex` so, dass Sie ein Muster wie in der linken Abbildung erhalten.
2. Vervollständigen Sie `circlecircles_exercise.tex` so, dass Sie ein Muster wie in der mittleren Abbildung erhalten.
3. *Bonusaufgabe.* Seien Sie kreativ! Modifizieren Sie das Programm aus der zweiten Teilaufgabe so, dass Sie die rechte Abbildung o. ä. erhalten.



Hinweis. Wenn Sie keine eigene L^AT_EX-Installation haben, können Sie den Quellcode unter <https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php> übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in L^AT_EX lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!

Aufgabe 6.4 (Polyduell). In der euklidischen Ebene (\mathbb{R}^2, d_2) treffen sich 2021 Personen zu einem Polyduell. Gemäß alter Tradition stellen sie sich so auf, dass die Abstände zwischen je zwei Personen alle verschieden sind. Pünktlich zum offiziellen Startsignal erschießt jeder gleichzeitig denjenigen, der ihm am nächsten ist (bezüglich d_2).

1. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Teilnehmer überlebt.

Hinweis. Extremalprinzip!

2. Zeigen Sie, dass sich die (geradlinigen!) Flugbahnen zweier Kugeln *nicht* schneiden können.

Bonusaufgabe (Origami).

1. Schlagen Sie in der Literatur nach wie Konstruierbarkeit von Punkten in \mathbb{R}^2 via Origami definiert ist und erklären Sie die erlaubten Konstruktionschritte sowohl mathematisch als auch origamisch.
2. Schlagen Sie in der Literatur nach wie sich Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal zu Konstruierbarkeit mit Origami verhält.

Hinweis. Wie immer: Quellen müssen vollständig und korrekt zitiert werden!