Geometrie: Woche 8

Prof. Dr. C. Löh/J. Seipel 28. Mai 2021

Leseauftrag (für die Vorlesung am 1. Juni). Wir fahren mit der analytischen Untersuchung von Kurven in Hilberträumen fort und beschäftigen uns mit der Parametrisierung nach Bogenlänge sowie der Krümmung von Kurven.

- Lesen Sie Kapitel 3.2.3 *Parametrisierung nach Bogenlänge*.
- Lesen Sie Kapitel 3.2.4 *Krümmung von Kurven*.

Leseauftrag (für die Vorlesung am 4. Juni). Wir kehren zu Dreiecken zurück und definieren mithilfe des Skalarprodukts und analytischer Begriffe von Kurven die Innenwinkel in euklidischen geodätischen Dreiecken.

- Lesen Sie Anhang A.6 *Elementare Analysis von Sinus und Kosinus*.

  Dies dient nur der Wiederholung; wir werden dies nicht im Detail in der Vorlesung besprechen. Da wir die Resultate verwenden möchten, sollten Sie sicherstellen, dass Sie sich an diese Dinge aus der Analysis erinnern.
- Lesen Sie Kapitel 3.3.1 *Winkel*.
- Lesen Sie Kapitel 3.3.2 *Winkelsumme in euklidischen Dreiecken*.
- Wiederholen Sie das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$ und Standardsätze zur Berechnung; falls Sie das Lebesgue-Maß noch nicht kennen, genügt auch die Beschreibung von Flächeninhalten über iterierte Riemann-Integrale.
- Lesen Sie Kapitel 3.3.3 *Flächeninhalte* bis Bemerkung 3.3.9.

Nächste Woche gehen wir weiter auf Flächeninhalte von euklidischen Polygonen ein und beweisen insbesondere den Satz von Pick.

Fingerübung (Krümmung von Kurven). Skizzieren Sie die untenstehenden Kurven $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (mit dem Standardskalarprodukt) und bestimmen Sie die (signierte) Krümmung. Welche Länge haben diese Kurven?

1. $t \longmapsto (t, 0)$
2. $t \longmapsto 1/\sqrt{2} \cdot (t, t)$
3. $t \longmapsto \begin{cases} (\sin t, \cos t) & \text{falls } t \geq 0 \\ (\sin t, 2 - \cos t) & \text{falls } t < 0 \end{cases}$

Aufgaben (für die Übungen am 8.–11. Juni). Es werden die folgenden Aufgaben (lösbar mit dem Material aus Woche 7) besprochen.

Bitte wenden

Aufgabe 7.1 (Orthogonalität)**.** Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp y$ und $y \perp z$, so folgt $x \perp z$.
2. Sind $x, y, z \in V$ mit $x \perp (y + z)$, so folgt $x \perp y$ und $x \perp z$.

Aufgabe 7.2 (Polarisierung und Cauchy-Schwarz in Lean)**.** Suchen Sie in der mathlib von Lean die folgenden Sachverhalte über Skalarprodukte:

1. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung,
2. die Polarisierungsgleichung.

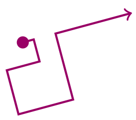
Geben Sie jeweils den genauen Namen und die Typ-Signatur der Theoreme an und geben Sie die Module an, in denen sich die Theoreme befinden. Warum gibt es jeweils mehrere Theoreme, die sich damit befassen?

Aufgabe 7.3 (Perpendikulus)**.** Der Roboter Perpendikulus lebt in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_2)$; aufgrund seines ausgeprägten Orthogonalitätsbewusstseins bewegt er sich auf Perpendikulus-Routen fort:

Eine *Perpendikulus-Route* aus $n \in \mathbb{N}$ Segmenten ist eine Folge $(s_1, \dots, s_n)$ von n geraden Segmenten (d.h. euklidischen Geodäten) in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $j \in \{1, \dots, n\}$, so hat s_j die Länge j, das Segment s_j endet am Anfang von s_{j+1} und s_{j+1} ist orthogonal zu s_j; dabei verstehen wir s_{n+1} als s_1 (insbesondere ist die Route geschlossen). Wir nennen $n \in \mathbb{N}$ eine *Perpendikulus-Zahl*, wenn es eine Perpendikulus-Route mit n Segmenten gibt.

1. Zeigen Sie, dass 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes Vielfache von 8 eine Perpendikulus-Zahl ist.
3. Warum sind 7, 10 und 12 *keine* Perpendikulus-Zahlen?
4. Zeigen Sie, dass jede Perpendikulus-Zahl durch 8 teilbar ist.

Hinweis. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem. Überlegen Sie sich dann, wie Sie den Kern des Problems durch zwei Gleichungen beschreiben können. Illustrieren Sie Ihre Argumente mit geeigneten Skizzen!



Aufgabe 7.4 (Kurven-Energie)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, seien $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ mit $T_0 < T_1$ und sei $\gamma\colon [T_0, T_1] \longrightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann definieren wir die *Energie von* γ durch

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \|\dot\gamma(t)\|^2 \, dt.$$

Zeigen Sie, dass $L(\gamma)^2 \leq 2 \cdot (T_1 - T_0) \cdot E(\gamma)$ und dass Gleichheit genau dann vorliegt, wenn die Funktion $\|\dot\gamma\|$ konstant ist.
Hinweis. Verwenden Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für ein Skalarprodukt auf einem geeigneten Funktionenraum.
Bonusaufgabe. Was bedeutet das in der Praxis? (Z.B. beim Autofahren ...)

Bonusaufgabe (Lehrplan)**.** Finden Sie online den Lehrplan Mathematik für Gymnasien in Bayern und beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Wie oft treten die Wörter „Beweis" und „Definition" im Lehrplan auf?
2. Welche Schlüsse ziehen Sie daraus für die Zukunft des Fachs „Mathematik" an Gymnasien?

Abgabe bis spätestens 4. Juni 2021, 8:30, via GRIPS.